भूमिती
९ वी
वर्ष १९८२

शिक्षकांकरिता निवेदन

शास्त्र विषयात जागतिक स्पर्धेत आपली मुले मागे पडू नयेत याकरता शास्त्र विषयाचा आधार असलेल्या गणिताकडे आपले अधिक लक्ष असणे आवश्यक आहे. ही गरज लक्षात घेऊनच भारताच्या सर्व राज्यांत गणिताच्या अभ्यासात क्रांतिकारक बदल करण्यात आले आहेत. महाराष्ट्र राज्य माध्यमिक शिक्षण मंडळानेही ही दृष्टी ठेवून गणिताचा अभ्यासक्रम तयार केला आहे.

विद्यार्थ्यांना, तसेच शिक्षकांनाही मार्गदर्शनासाठी सहजपणे उपलब्ध होऊ शकतील, अशी संदर्भ पुस्तके आज तरी आपल्याकडे नाहीत. संदर्भग्रंथांची ही त्रुटी लक्षात घेता, पुस्तकातील विवेचन सविस्तरपणे करणे आवश्यक होते. त्यामुळे पुस्तकातील पृष्ठांची संख्या वाढविली आहे. पुस्तकाची पृष्ठसंख्या वाढविण्याचे दुसरे कारण म्हणजे पुस्तकात दिलेली भरपूर उदाहरणे हे होय. भरपूर उदाहरणे दिल्यामुळे विद्यार्थ्यांना गृहपाठाकरता त्याचा उपयोग होईल. तसेच वर्गात नमुन्यादाखल सोडवायची उदाहरणे निवडण्यासही शिक्षकांना सोयीचे ठरेल. त्यांना अन्यत्र उदाहरणे हुडकावी लागणार नाहीत.

अभ्यासाकरता दिलेल्या उदाहरणांत आम्ही शक्यतो विद्यार्थ्यांना लिहिण्याच्या श्रमापेक्षा विचार करण्याकरता जास्त परिश्रम करावे लागावेत असे धोरण ठेवले आहे. शाळांमधील प्रश्नपत्रिकांमध्येही हे धोरण पाळले जावे. उदाहरणांची निवड करताना मूळ विषयाचे आकलन अधिक दृढ व्हावे अशी दृष्टी ठेवली आहे. यासाठी उदाहरणे वर्गामधून सोडवून त्यांची तयार उत्तरे देण्यावर भर देण्यापेक्षा, ती विद्यार्थ्यांनी सोडवावीत याकडे अधिक लक्ष देण्याने विषयाचे आकलन चांगले होईल.

इयत्ता आठवी, नववी आणि दहावीचे अभ्यासक्रम हे एकसंध आहेत. व्यवहाराच्या सोयीकरता त्यांचे भाग पाडणे अटळ आहे. हे लक्षात घेता आठवीचा काही भाग नववीत व नववीचा काही भाग दहावीत पुन्हा अभ्यासणे लाभदायक ठरेल. या पुस्तकात आठवीच्या अभ्यासाची थोडी पुनरावृत्ती आढळेल. ती विषयाचा अभ्यास अधिक सखोल आणि तर्कशुद्ध व्हावा म्हणून मुद्दाम केली आहे.

अभ्यासविषयात नव्याने येणाऱ्या संकल्पना, ज्या संज्ञांनी व्यक्त केल्या जातात त्यांचे आकलन स्वच्छपणे होणे आवश्यक आहे. त्यांचीही उजळणी व्हावी व त्यांकडे लक्ष केंद्रित केले जावे म्हणून प्रत्येक प्रकरणात नव्याने आलेल्या संज्ञांची यादी दिलेली आहे. प्रकरण संपल्यावर त्यांची उजळणी शिक्षकांनी करून घ्यावी. मराठी पुस्तकातील सर्व संज्ञांबरोबर त्यांचे इंग्रजी प्रतिशब्दही मुद्दाम प्रत्येक प्रकरणाच्या शेवटी दिले आहेत. सदर प्रतिशब्द विद्यार्थ्यांना शिकवणे आवश्यक आहे.

संज्ञांचे महत्त्व लक्षात घेता त्यांच्या व्यवस्थित व्याख्या देता येणे हे महत्त्वाचे आहे. परंतु एखादया संज्ञेची पुस्तकातील व्याख्या हीच काय ती एकमेव व्याख्या आहे असे नव्हे. म्हणून पुस्तकात दिलेल्या व्याख्याच विद्यार्थ्यांकडून घोकून घेतल्या जाऊ नयेत. तर संज्ञा विद्यार्थ्यांना समजावून देऊन व्याख्या त्यांनाच तयार करण्याची सवय लावावी.

विशिष्ट पद्धतीने लिहिलेल्या सिद्धताच काय त्या योग्य आहेत असे नव्हे. सिद्धतातील मूळ कल्पना विद्यार्थ्यांना समजावून देऊन त्यांना त्यांच्या शब्दांत सिद्धता तयार करण्यास प्रवृत्त करावे. विद्यार्थ्यांनी स्वतःच्या शब्दांत लिहिलेल्या सिद्धता, भाषेच्या दृष्टीने थोड्याफार सदोष असल्या तरी त्यांच्या प्रयत्नाला अधिक महत्त्व आहे. पुस्तकाच्या मर्यादेमुळे, त्यात एकाच प्रमेयाच्या किंवा नियमाच्या विविध सिद्धता देणे फारसे शक्य होत नाही. विविध सिद्धता शिक्षकांनी दयाव्यात व विद्यार्थ्यांनाही त्यासाठी प्रवृत्त करावे.

सिद्धतेत एकाच तंत्राचा अवलंब करण्यावर भर देण्याने यांत्रिकपणा येतो. तो शैक्षणिकदृष्ट्या घातक आहे. यांत्रिकपणा टाळण्याकरता आम्ही सिद्धतेचे [illegible] निरनिराळ्या [illegible] सिद्धता देण्याकरिता निरनिराळ्या तंत्रांचा अवलंब केला आहे. दोन स्तंभी सिद्धता ही सर्वश्रेष्ठ आहे असे समजू नये.

बीजगणित आणि भूमिती यांच्या अभ्यासात विविध गुणधर्म समजून घ्यायचे असतात. या गुणधर्मांच्या सिद्धताही समजणे आवश्यक आहे. परंतु गुणधर्मांचे आकलन न होता विद्यार्थ्यांकडून केवळ सिद्धता घोकून घेणे अपेक्षित नाही. या गुणधर्मांचा वापर निरनिराळ्या प्रसंगी कसा करायचा, कसा केला जातो, याचे शिक्षण देण्यावर शिक्षकांनी अधिक भर द्यावा.

गणित विषयाच्या अभ्यासातून तर्कशुद्ध मांडणी करण्याची सवय लागावी ही एक अपेक्षा आहे. यासाठी 'नकरण', 'व्यत्यास', 'परास्थापन', 'अप्रत्यक्ष सिद्धता', 'पर्यायाने किंवा प्रकारशः सिद्धता' इत्यादींची ओझरती चर्चा आम्ही केली आहे. शिक्षकांनी विद्यार्थ्यांना त्याची ओळख करून द्यावी.

अवकाश भूमितीच्या अध्ययनात प्रतिकृतींचा उपयोग भरपूर प्रमाणात करावा. तयार प्रतिकृतींपेक्षा त्या विद्यार्थ्यांकडून तयार करवून घेण्याने त्यांना विषयाचे आकलन अधिक स्पष्ट होऊ शकेल. प्रतिकृतींप्रमाणेच निरनिराळे आराखडे आणि तक्ते तयार करणे व करवून घेणे आवश्यक आहे.

प्रत्येक विषयाची विशेष अशी एक भाषा असते. दुर्दैवाने आपल्याकडे गणितामध्ये अजून तशी भाषा निर्माण झालेली नाही. त्यामुळे नवीन निर्माण केलेले मराठी भाषेतील शब्द आणि वाक्प्रयोग प्रारंभी विचित्र वाटतील. पण ते रूढ झाल्यावर हा विचित्रपणा आपोआप नाहीसा होईल. मात्र हे शब्द व वाक्प्रयोग रूढ झालेले नसल्याने, आम्ही एकाच वाक्प्रयोगाला चिकटून न बसता जाणीवपूर्वक त्यात विविधता ठेवली आहे.

मराठीकरणातील एक अडचण म्हणजे प्रतीक-संकेत. इंग्रजीतील व बऱ्याच अंशी जागतिक मान्यता असलेले संकेत, आम्ही बुद्धिपुरस्सरच स्वीकारलेले [illegible] पुढील [illegible] अभ्यास करताना विद्यार्थ्यांना अडचणी येणार नाहीत.

अभ्यासक्रमामध्ये काही प्रमेयांच्या सिद्धता अपेक्षित नसल्याचे उल्लेखलेले आहे. तरीही प्रमेयांतील अंतर्भूत गुणधर्म विद्यार्थ्यांना नीट आकलन व्हावा याकरता काही प्रमेयांच्या सिद्धता दिल्या आहेत. मात्र त्या, विद्यार्थ्यांना लिहिता याव्यात ही अपेक्षा नाही. यासाठी संबंधित मजकूर व काही टीपा लहान अक्षरांत छापल्या आहेत. त्याचप्रमाणे पुस्तकातील त्रिमिती आकृतींचे आकलन विद्यार्थ्यांना सहज व्हावे यासाठी भूमिती पुस्तकातील प्रकरण सात व दहा यांमधील त्रिमिती आकृती रंगीत छापल्या आहेत.

विद्यार्थ्यांच्या मनात कल्पना ठसणे अधिक महत्त्वाचे आहे. $a \in N$ असे म्हणण्यापेक्षा a ही एक नैसर्गिक संख्या आहे असे म्हणण्याने विद्यार्थ्यांना चटकन अर्थबोध होतो. जसजशा कल्पना स्पष्ट होतील तसतसा चिन्हांचा वापर विद्यार्थी स्वतःच सहजपणे करू शकतील व तेच शैक्षणिकदृष्ट्या योग्य आहे. चिन्हांच्या वापरावर अवाजवी भर देण्यात येऊ नये.

बीजगणित व भूमिती ह्या दोन्ही पुस्तकांत इंग्रजी अंक, आंतरराष्ट्रीय चिन्हे व सूत्रे वापरली आहेत.

महाराष्ट्रातील प्राध्यापक व माध्यमिक शिक्षक यांनी वारंवार एकत्रित येऊन गणित विषयाच्या अध्यापनाच्या पद्धती विकसित कराव्यात. म्हणजे विद्यार्थ्यांत गणित विषयाची आवड निर्माण होईल.

प्रकरण 1

बिंदू, रेषा व प्रतल

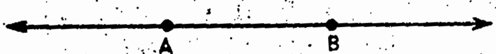
§ 1·1 [illegible] अभ्यासात तुमची भूमिती या विषयाशी ओळख झालेली आहे. भूमितीत आपण बिंदू, रेषा, प्रतल, रेषाखंड व त्यांच्यापासून तयार होणाऱ्या आकृती इत्यादींच्या गुणधर्मांचा अभ्यास करतो हे तुम्हांला माहीत आहे.

भूमितीचा अभ्यास आपण का करतो ? हा विषय शिकण्यापासून अनेक फायदे आहेत. गणिताच्या अनेक शाखांत भूमितीचा उपयोग होतो. इमारती व पूल बांधणे, यंत्रांच्या रचनेचा अभ्यास, सुतारकाम, चित्रकला वगैरे अनेक गोष्टींत भूमितीचे ज्ञान असणे अत्यंत आवश्यक आहे.

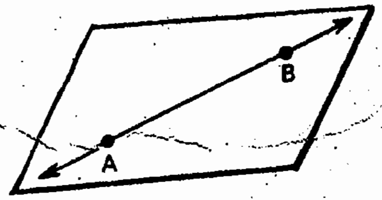
या शिवाय आता आपण ज्या पद्धतीने भूमितीचा अभ्यास करणार आहोत त्या पद्धतीवरून, एखादे विधान तर्कशुद्ध युक्तिवादाने (logical reasoning) सिद्ध करणे म्हणजे काय हे तुमच्या लक्षात येईल. भूमितीच्या अभ्यासाने तर्कशुद्ध विचार करण्याची व मांडण्याची सवय होते. आपले म्हणणे दुसऱ्यांना चांगल्या तऱ्हेने पटवून देता येते. भूमितीतील सिद्धता लिहिण्याच्या व वाचण्याच्या सरावाने आपल्याला प्रत्येक गोष्टीची कारणमीमांसा करण्याची सवय लागते.

§ 1·2 आठव्या इयत्तेत तुम्ही भूमितीतील अनेक कल्पनांचा व त्यांच्या निरनिराळ्या गुणधर्मांचा अभ्यास केलात. या गुणधर्मांचा अभ्यास करताना तुम्ही कागदाच्या घडया, कागद, मोजपट्टी, पेन्सिल किंवा कधी कधी प्रत्यक्ष प्रतिकृती यांचे साहाय्य घेतले होते व ते गुणधर्म प्रयोग करून पडताळून पाहिले होते. भूमितीतील गुणधर्म मांडताना तुम्ही ज्या ज्या कल्पनांचा उपयोग केलात, त्या सर्व कल्पनांच्या मुळाशी तीन मुख्य कल्पना आहेत. त्या म्हणजे बिंदू, रेषा व प्रतल. या तीन कल्पनांचा परिचय तुम्ही स्थूलमानाने करून घेतला होता. पेन्सिलीच्या बारीक टोकाने कागदावर काढलेल्या ठिपक्यावरून बिंदूची कल्पना येते. सरळ पट्टी घेऊन पेन्सिलीने कागदावर काढलेल्या रेघेवरून रेषेची कल्पना येते. टेबलाचा सपाट पृष्ठभाग किंवा भिंत यांवरून प्रतल म्हणजे काय याची कल्पना येते. या तीन मूलभूत कल्पनांचे परस्परांशी संबंध दाखवणारे काही गुणधर्म तुम्ही, वर सांगितल्याप्रमाणे प्रायोगिक पद्धतीने पडताळून पाहिले. त्यांपैकी काही गुणधर्म उजळणीकरता खाली दिले आहेत.

(a) कोणत्याही दोन भिन्न बिंदूंतू एक आणि एकच रेषा जाते.

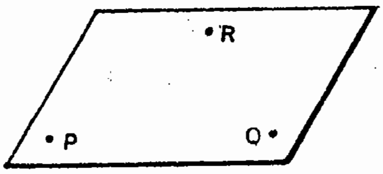


आ. 1·1



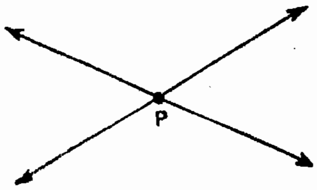
आ. 1·2

(b) प्रतलातील कोणत्याही दोन भिन्न बिंदूंतून जाणारी रेषा पूर्णपणे त्या प्रतलात असते.



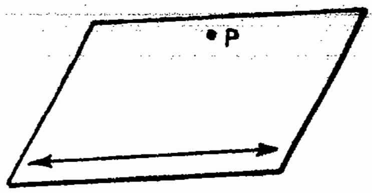
आ. 1·3

(c) तीन नैकरेषीय बिंदू एक आणि एकच प्रतल निश्चित करतात.



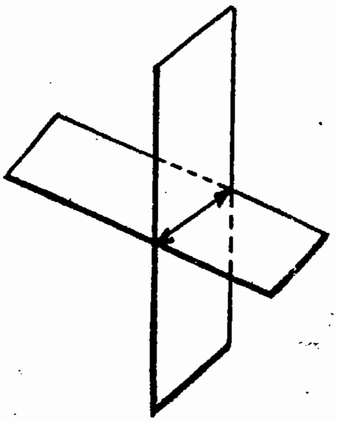
आ. 1·4

(d) दोन भिन्न रेषा एकमेकींस छेदत असतील तर त्या एकाच बिंदूत छेदतात.



आ. 1·5

(e) दिलेली रेषा व तिच्या बाहेरील एक बिंदू यांतून जाणारे एक आणि एकच प्रतल असते.



आ. 1·6

(f) एकमेकांना छेदणाऱ्या दोन प्रतलांचा छेद म्हणजे एक रेषा असते.

बिंदू, रेषा व प्रतल यांच्यासंबंधीचे वरील गुणधर्म व इतर काही गुणधर्म तुम्ही प्रायोगिक पद्धतींनी पडताळून पाहिलेत.

प्रायोगिक पद्धतींनी भूमितीय आकृतींचे गुणधर्म अभ्यासण्याची प्रथा फार पूर्वीपासून चालत आली आहे. असे अनेक गुणधर्म भारतीय, इजिप्शियन व बाबिलोनियन अभ्यासकांना ख्रिस्तपूर्व 300 वर्षांपूर्वीही माहीत होते. हे गुणधर्म त्यांनी प्रायोगिक पद्धतींनीच मिळवले होते. ख्रिस्तपूर्व तिसऱ्या शतकात होऊन गेलेल्या युक्लिड या ग्रीक गणितज्ञाने या सर्व माहितींचे संकलन करून तिच्यात सुसूत्रता आणली. युक्लिडने आपल्या भूमितीवरील ग्रंथात हे दाखवून दिले की, काही गुणधर्म सत्य आहेत असे मानल्यास त्यावरून इतर अनेक गुणधर्म तर्कशुद्ध पद्धतीने निष्कर्ष म्हणून काढता येतात.

प्रस्तुत पुस्तकात देखील आपण बिंदू, रेषा व प्रतल यांच्यासंबंधीचे काही गुणधर्म सत्य आहेत असे गृहीत धरून, त्यांवरून इतर कोणते गुणधर्म तर्कशुद्ध पद्धतीने (logically) प्रस्थापित करता येतात हे पाहणार आहोत.

जो गुणधर्म सत्य आहे असे आपण गृहीत धरतो त्याला आपण **गृहीतक** (Postulate) म्हणू. गृहीतकाच्या आधारे काढलेल्या महत्त्वाच्या व उपयुक्त निष्कर्षाला **प्रमेय** (Theorem) म्हणतात. प्रमेय म्हणजे गृहीतकाच्या आधारे तर्कशुद्ध पद्धतीने सिद्ध करता येणारे विधान होय. गृहीतक हे मुळातच सत्य मानल्यामुळे ते सिद्ध करण्याचा प्रश्नच उद्भवत नाही. आता तुम्ही विचाराल, 'सिद्धता' म्हणजे काय? एखादया विधानाची **सिद्धता** (Proof) म्हणजे ते विधान सत्य का आहे याचे तर्कशुद्ध मीमांसा होय.

व्यवहारातील एखादे उदाहरण घेऊन आपण हे समजावून घेऊ. समजा अ वर एखादा गुन्हा केल्याचा आरोप आहे. अ ला आपण निरपराध आहोत हे सिद्ध करायचे आहे. तो ही गोष्ट खालील प्रकारे पटवून देऊ शकेल. 'हा गुन्हा नागपूरला ज्या दिवशी, ज्या वेळी झाला; त्या दिवशी व त्याच वेळी मी मुंबईला होतो. आणि ही गोष्ट इतर पुराव्यांवरून पडताळून पाहता येईल. म्हणून मी हा गुन्हा केला असणे शक्य नाही.' अ चे निरपराधित्व सिद्ध करण्याकरता हा युक्तिवाद पुरेसा आहे.

वरील युक्तिवादात काय गृहीत धरले आहे? 'एक व्यक्ती एकाच वेळी दोन भिन्न ठिकाणी असू शकत नाही' हेच या युक्तिवादात गृहीत धरले आहे.

भूमितीतील प्रमेये सिद्ध करण्यासाठी आपण गृहीतके, वास्तव संख्यांचे गुणधर्म व तर्कशास्त्राची पद्धती यांचा उपयोग करतो. याचा विचार अर्थातच आपण पुढे करू.

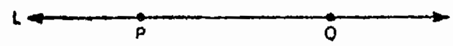
आठव्या वर्गात तुम्ही शिकलेली भूमिती व नवव्या वर्गात शिकायची भूमिती यांच्या पद्धतींत कोणता महत्त्वाचा फरक आहे, हे आता तुमच्या लक्षात आलेच असेल. आठवीत तुम्ही भूमितीय गुणधर्म केवळ प्रायोगिक पद्धतींनी पडताळून पाहिले. आता ह्या पुस्तकात आपण काही भूमितीय गुणधर्म गृहीतके मानून त्यांवरून इतर अनेक गुणधर्म निष्कर्ष म्हणून सिद्ध करणार आहोत.

§ 1·3 प्रारंभिक गृहीतके :

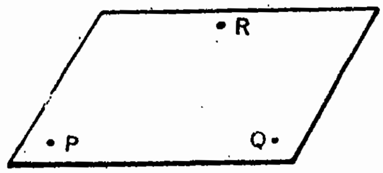
तुम्ही अभ्यासलेल्या पान 1 वरील गुणधर्मांपैकी प्रथम खालील चार गुणधर्म आपण या प्रकरणात गृहीतके मानणार आहोत. इतर आणखीही काही गुणधर्म आपण पुढे गृहीतके म्हणून घेऊ. त्यांची चर्चा ओघाने येईलच.

गृहीतक 1 : रेषेचे गृहीतक (Line Postulate)

कोणतेही दोन भिन्न बिंदू समाविष्ट करणारी एक आणि एकच रेषा असते.



आ. 1·7



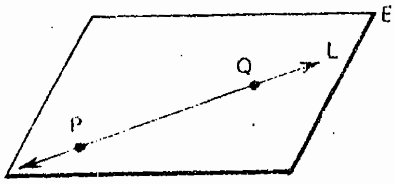
आ. 1·8

गृहीतक 2 : प्रतल निश्चितीचे गृहीतक
(Plane Postulate)

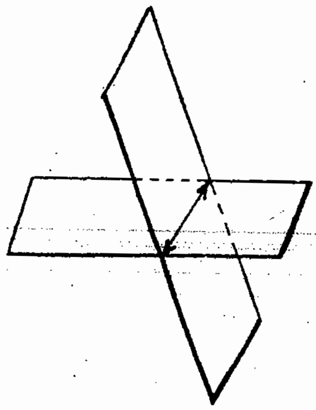
दिलेले तीन नैकरेषीय बिंदू समाविष्ट करणारे एक आणि एकच प्रतल असते.

गृहीतक 3 : सपाट प्रतलाचे गृहीतक
(Flat Plane Postulate)

प्रतलातील कोणतेही दोन बिंदू समाविष्ट करणारी रेषा पूर्णपणे त्या प्रतलात असते.



आ. 1·9

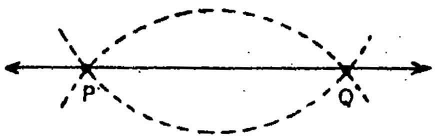


आ. 1·10

गृहीतक 4 : प्रतलछेदनाचे गृहीतक
(Planes Intersection Postulate)

परस्परांना छेदणाऱ्या दोन प्रतलांचा छेद म्हणजे एक रेषा असते.

रेषेच्या गृहीतकावरून रेषा म्हणजे सरळ रेषाच असते हे तुम्हांला दिसून येईल. कारण दोन बिंदूंतून अनेक वक्र रेषा जाऊ शकतात. पण सरळ रेषा मात्र एकच जाते हे आ. 1·11 वरून कळून येईल. तसेच सपाट प्रतलाच्या गृहीतकावरून, प्रतल टेबलाच्या किंवा भिंतीच्या सपाट पृष्ठभागासारखे असते हेही दिसून येईल. सपाट पृष्ठभागावर मोजपट्टीचे दोन बिंदू टेकवल्यास ती पट्टी पूर्णपणे त्या पृष्ठभागावर टेकते. परंतु हाच प्रयोग चेंडूच्या पृष्ठभागावर किंवा एखादया वक्र पृष्ठभागावर केल्यास पट्टी पूर्णपणे त्या पृष्ठभागावर टेकत नाही. हाच गुणधर्म गृहीतक 2 मध्ये सांगितला आहे. म्हणूनच त्याला 'सपाट प्रतलाचे' गृहीतक म्हणतात.



आ. 1·11

काही संज्ञा व त्यांचे अर्थ :

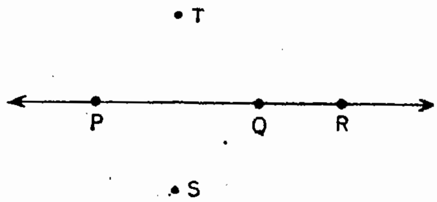
पुढील विवेचन नीट समजण्यासाठी वरील गृहीतकांत वापरलेल्या व त्या गृहीतकांशी संबंधित असलेल्या काही संज्ञांचे अर्थ आपण समजावून घेऊ.

§ 1·4 **एकरेषीयता** (Collinearity) :

व्याख्या : दिलेल्या सर्व बिंदूंना समाविष्ट करणारी एखादी रेषा असेल तर त्या बिंदूंना **एकरेषीय** अथवा एकरेषिक किंवा नुसते रेषीय अथवा रेषिक बिंदू म्हणतात.

दिलेले सर्व बिंदू समाविष्ट करील अशी एकही रेषा नसेल तर त्या बिंदूंना **नैकरेषीय** (न-रेषीय किंवा अरेषीय) बिंदू म्हणतात.

आ. 1·12 मध्ये P, Q, R, S व T हे पाच बिंदू दिले आहेत, त्यांपैकी P, Q, R या तीन बिंदूंतून जाणारी एक रेषा आहे. म्हणून P, Q, R हे तीन बिंदू एकरेषीय आहेत. परन्तु दिलेल्या पाचही बिंदूंतून जाईल अशी एकही रेषा नसल्याने, हे पाच बिंदू नैकरेषीय आहेत.



आ. 1·12

P, Q, S हे तीन बिंदू एकरेषीय आहेत का ?

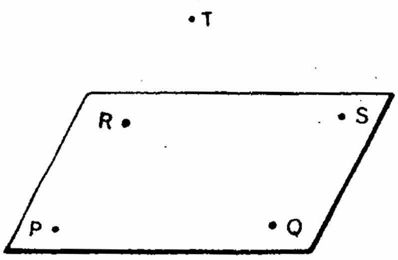
टीप : कोणतेही दोन बिंदू एकरेषीय असतातच. (गृहीतक 1 पाहा.)

§ 1·5 **एकप्रतलीयता** (Coplanarity) :

व्याख्या : दिलेल्या सर्व बिंदूंना समाविष्ट करणारे एखादे प्रतल असेल तर त्या बिंदूंना **एकप्रतलीय** (Coplanar) बिंदू म्हणतात.

दिलेल्या सर्व बिंदूंना समाविष्ट करील असे एकही प्रतल नसेल तर त्या बिंदूंना **नैकप्रतलीय** बिंदू म्हणतात.

आ. 1·13 मध्ये दाखवलेल्या P, Q, R व S या बिंदूंना समाविष्ट करणारे एक प्रतल आहे. म्हणून हे चार बिंदू एकप्रतलीय आहेत. परन्तु P, Q, R, S व T या पाचही बिंदूंतून जाईल असे एकही प्रतल नाही. म्हणून हे पाच बिंदू नैकप्रतलीय आहेत.



आ. 1·13

P, Q, S व T हे बिंदू एकप्रतलीय आहेत का ?

Q, R व T हे बिंदू एकप्रतलीय आहेत का ?

टीप : (1) एकरेषीय बिंदू एकप्रतलीय असतातच. (2) कोणतेही तीन बिंदू एकप्रतलीय असतात. (का ?)

§ 1·6 भूमितीत एकच गोष्ट सांगण्यासाठी आपण अनेकदा वेगवेगळे शब्दप्रयोग करतो. अशी काही समानार्थी विधाने खाली दिली आहेत.

(i) दोन भिन्न बिंदू समाविष्ट करणारी एक आणि एकच रेषा असते.
दोन भिन्न बिंदूंतून जाणारी एक आणि एकच रेषा असते.
दोन भिन्न बिंदूंतून एक आणि एकच रेषा काढता येते.
दोन भिन्न बिंदू एका आणि एकाच रेषेवर असतात.

वरील चारही विधानांत एकच गोष्ट सांगितली आहे. त्यामुळे या विधानांपैकी कोणत्याही एकाकरता दुसरे विधान वापरले तरी अर्थ तोच होईल.

याचप्रमाणे तीन बिंदू व प्रतल यांच्या संबंधी अशी समानार्थी विधाने करता येतील.

(ii) L रेषा ही E प्रतलात आहे.

E प्रतल हे L रेषेला समाविष्ट करते.

E प्रतल हे L रेषेतून जाते.

ही तीन विधाने एकच गोष्ट सांगतात.

'एखादा बिंदू समाविष्ट करणारी रेषा' व 'एखादी रेषा समाविष्ट करणारे प्रतल' या शब्दप्रयोगात एक महत्त्वाचा फरक आहे. जेव्हा एखादी रेषा एखादा बिंदू समाविष्ट करते, तेव्हा तो बिंदू त्या रेषेचा (बिंदू संचाचा) घटक असतो. परंतु हाच अर्थ रेषा व प्रतल यांच्या संदर्भात घेता येत नाही. कारण जेव्हा एखादे प्रतल एखादी रेषा समाविष्ट करते, तेव्हा ती रेषा (बिंदू संच) त्या प्रतलाचा (बिंदू संचाचा) उपसंच असते.

§ 1·7 एक आणि एकच (One and Only One)

रेषेच्या गृहीतकानुसार, दोन भिन्न बिंदूतून जाणारी एक आणि एकच रेषा असते. या वाक्यात वस्तुतः दोन गोष्टी सांगितल्या आहेत.

(1) दोन बिंदूतून **एक** रेषा जाते.

आणि (2) त्या बिंदूतून **एकच** रेषा जाते.

यांतील पहिल्या विधानात दोन बिंदूतून **निदान एक** रेषा जाते हे सांगितले असून, दुसऱ्यात, अशी **एकच** रेषा असते—म्हणजे **एकापेक्षा जास्त** असू शकत **नाहीत**—हे सांगितले आहे. भूमितीत आणि गणिताच्या इतर शाखांत 'एक आणि एकच' हा शब्दप्रयोग वारंवार वापरावा लागतो. अशा प्रत्येक ठिकाणी त्याचे वर दिलेले दोन अर्थ लक्षात घेतले पाहिजेत.

§ 1·8 व्याख्या : तुम्ही आठवीत शिकलेली खालील व्याख्या पाहा.

'जर त्रिकोणाच्या तीनही भुजा एकरूप असतील तर तो त्रिकोण समभुज आहे असे म्हणतात.'

ही व्याख्या किंवा तुम्ही शिकलेल्या इतर व्याख्या पाहिल्यास तुम्हांला दिसून येईल की, व्याख्येत बहुधा दोन विधाने 'जर–तर'चा वापर करून जोडलेली असतात. प्रमेयांत व व्यवहारात बोलताना देखील अशा प्रकारच्या वाक्यरचना येतात. प्रमेयांत किंवा व्यवहारात जेव्हा आपण 'जर...तर...' अशा प्रकारची विधाने करतो, तेव्हा पहिले विधान सत्य असेल तर दुसरे विधान सत्य असते इतकेच आपल्याला म्हणायचे असते; दुसरे विधान सत्य असेल तर पहिले विधान सत्य असते किंवा नसते या विषयी काहीच म्हणायचे नसते.

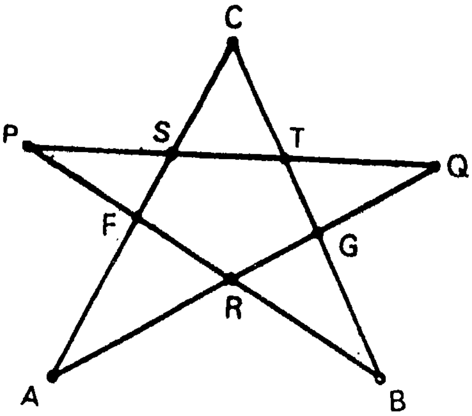
व्याख्येबाबतचा संकेत मात्र काहीसा निराळा आहे. व्याख्येत, पहिले विधान सत्य असेल तर दुसरे विधान सत्य असते, असे तर म्हणायचे असतेच, पण दुसरे विधान सत्य असेल तर पहिले विधान सत्य असते असेही म्हणायचे असते. उदाहरणार्थ, वरील व्याख्येत, 'जर त्रिकोणाच्या तीनही भुजा एकरूप असतील तर तो त्रिकोण समभुज असतो' हे तर म्हटले आहेच, पण 'जर एखादा त्रिकोण समभुज असेल, तर त्याच्या तीनही भुजा एकरूप असतात' हेही म्हणायचे असते. कोणत्याही व्याख्येच्या बाबतीत आपण हे दोन्ही अर्थ लक्षात घेतले पाहिजेत.

[illegible] [illegible] एक गुणधर्म असा आहे की, ज्याच्यात एका मोठ्या विधानाचा आशय, दुसऱ्या एका विधानाने संक्षिप्त स्वरूपात सांगितलेला असतो. जसे, 'दिलेल्या सर्व बिंदूंना समाविष्ट करणारी एखादी रेषा असते' या विधानाचा आशय 'ते बिंदू एकरेषीय आहेत' या संक्षिप्त स्वरूपात सांगता येतो.

§ 1·9 प्रश्न :

1. आ. 1·14 वरून खालील बिंदू एकरेषीय आहेत की नैकरेषीय आहेत ते सांगा.

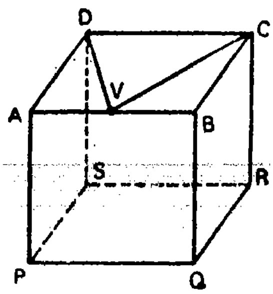
(i) A, B, C.
(ii) A, F, P.
(iii) A, R, G, T.
(iv) P, S, T, G.
(v) C, G, T, B.
(vi) A, G, F, S.



आ. 1·14

2. आ. 1·15 मध्ये एक काटकोनी ठोकळा दाखवला आहे. त्या आकृतीतील खालील बिंदू एकप्रतलीय आहेत की नैकप्रतलीय आहेत ते सांगा.

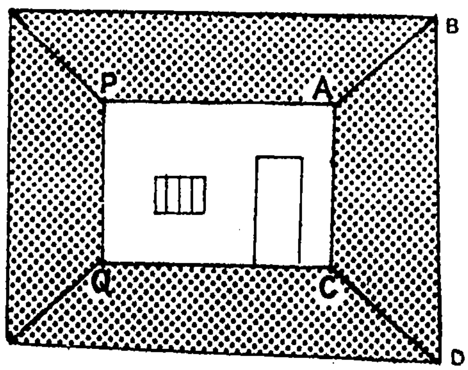
(i) A, B, V, C.
(ii) A, B, Q, R.
(iii) P, Q, D.
(iv) B, C, R, Q.



आ. 1·15

§ 1·10 रेषा-रेषा व रेषा-प्रतल यांचे छेदन.

एका प्रतलातील दोन भिन्न रेषा एकमेकींस किती बिंदूंत छेदतात ? तुमच्या खोलीच्या भिंतीच्या कडा पाहा. त्यांतील कडा PA व कडा QC या एकमेकींना छेदत नाहीत असे दिसते. एकाच प्रतलातील दोन रेषा एकमेकींना छेदत नसतील तर त्यांना समांतर रेषा म्हणतात, हे तुम्हांला माहीतच आहे. आता प्रतलातील एकमेकींना छेदणाऱ्या रेषांचा आपण विचार करू. भिंतीच्या कडा PA व कडा AC या A ह्या एकाच बिंदूत छेदतात असे दिसते. कागदावर मोजपट्टीच्या साहाय्याने एकमेकींस छेदणाऱ्या दोन रेषा काढल्या तर त्या एकाच बिंदूत छेदतात असे दिसून येते.

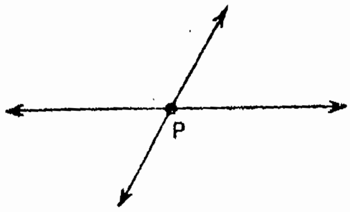


आ. 1·16

छेदणाऱ्या रेषांचा हा गुणधर्म, रेषेच्या गृहीतकावरून (गृहीतक 1) सिद्ध करता येतो. पण या सिद्धतेचा विचार पुढे प्रकरण 5 मध्ये स्वतंत्रपणे करणे जास्त सोयीचे होणार असल्यामुळे, या ठिकाणी आपण हा गुणधर्म, सिद्धता न देता, फक्त खालील प्रमेयाच्या स्वरूपात मांडू.

§ 1·11 ■ रेषा छेदनाचे प्रमेय :

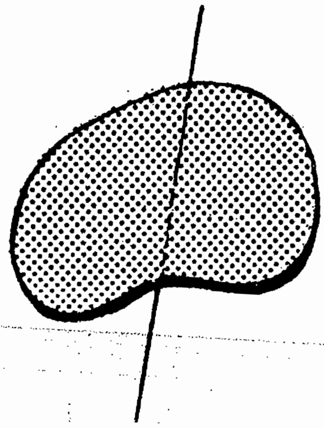
दोन भिन्न रेषा एकमेकींस छेदत असतील तर त्या एकाच बिंदूत छेदतात.



आ. 1·17

प्रमेय 1·11 प्रमाणेच खालील तीन प्रमेयांची फक्त चर्चा आपण या ठिकाणी करणार आहोत. त्यांची सिद्धता प्रकरण 5 मध्ये पाहू.

§ 1·12 दिलेली रेषा दिलेल्या प्रतलास किती बिंदूत छेदते? अर्थात ती रेषा त्या प्रतलास समांतर असेल तर ती त्या प्रतलास छेदणार नाही. अशा रेषेचा विचार आपण सध्या करणार नाही. तसेच ती रेषा त्या प्रतलात समाविष्ट नाही असेही गृहीत धरू. म्हणजेच प्रतलात नसलेली व त्या प्रतलास समांतर नसलेली रेषा त्या प्रतलास किती बिंदूत छेदील? एखादी सरळ तार कार्डबोर्डला छेदून जाईल अशी धरा. ही तार कार्डबोर्डला एकाच बिंदूत छेदते असे तुम्हांला दिसून येईल. यावरून मिळणारा रेषा व प्रतल यांच्या छेदनाचा गुणधर्म खालील प्रमेयात सांगितला आहे. हे प्रमेय, गृहीतक 3 वरून सिद्ध करता येते.

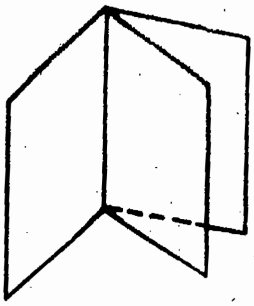


आ. 1·18

§ 1·13 ■ प्रतल–रेषा छेदनाचे प्रमेय :

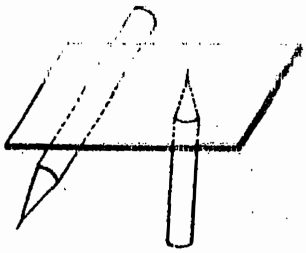
कोणत्याही प्रतलास, त्या प्रतलात नसलेली, एखादी रेषा छेदत असेल तर ती रेषा त्या प्रतलास एकाच बिंदूत छेदते.

§ 1·14 दिलेल्या रेषेतून असंख्य प्रतले जातात हे तुम्हांला माहीतच आहे. आ. 1·19 मध्ये एका रेषेतून जाणारी काही प्रतले दाखवली आहेत.



आ. 1·19

आता दिलेली रेषा व तिच्या बाहेरील एक बिंदू यांतून किती प्रतले जातील? हे पाहण्यासाठी एक लांब पेन्सील आडवी धरा व तिच्या जवळ दुसरी पेन्सील उभी धरा (आ. 1·20). आता कार्डबोर्डचा एक तुकडा घेऊन असा ठेवा की, तो आडव्या पेन्सिलीवर पूर्णपणे टेकून उभ्या पेन्सिलीच्या टोकालाही स्पर्श करील. अशा रीतीने कार्डबोर्ड ठेवता येतो हे तुम्हांला दिसून येईल. यावरून दिलेली रेषा व तिच्या बाहेरील एक बिंदू यांतून एक प्रतल जाते असे दिसते.

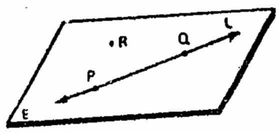


आ. 1·20

हाच प्रायोगिक निष्कर्ष आपल्या गृहीतकांच्या आधारे युक्तिवाद करून कसा काढता येईल ते पाहा.

समजा L ही दिलेली रेषा आहे व R हा तिच्या बाहेरील एक बिंदू आहे.

प्रतलासंबंधी आपले गृहीतक कोणते आहे? तीन नैकरेषीय बिंदू समाविष्ट करणारे एक आणि एकच प्रतल असते (गृहीतक 2). आता दिलेल्या L रेषेवर P व Q हे दोन बिंदू घ्या. दिलेला बिंदू R आणि P व Q हे बिंदू नैकरेषीय आहेत. यांना समाविष्ट करणारे एक प्रतल असते, हे आपण गृहीतक 2 च्या आधारे म्हणू शकतो, आणि P व Q या बिंदूंतून जाणाऱ्या या प्रतलात L ही रेषा पूर्णपणे असते हे सपाट प्रतलाच्या गृहीतकावरून (गृहीतक 3) म्हणता येते. म्हणजेच हे प्रतल, दिलेली रेषा व तिच्या बाहेरील एक बिंदू यांतून जाते. यावरून दिलेली रेषा व तिच्या बाहेरील एक बिंदू यांतून एक प्रतल जाते हे आपण सिद्ध केले.



आ. 1·21

आता त्या रेषेतून व त्याच बिंदूतून दुसरे एखादे प्रतल जाऊ शकेल का? हे पाहण्यासाठी कागदावर एक रेषा काढून तिच्या बाहेर एक बिंदू घ्या. म्हणजे कागदाचे प्रतल हे त्या रेषेतून व त्या बिंदूतून जाणारे एक प्रतल होईल. आता कार्डबोर्डचा एक तुकडा घेऊन त्याला त्या रेषेवर व बिंदूवर टेकवा. आता तुम्हांला दिसून येईल की, तो तुकडा कागदाशी पूर्णपणे जुळतो. म्हणजेच त्या रेषेतून व बिंदूतून एकच प्रतल जाते असे दिसते.

वरील प्रयोगांचा निष्कर्ष खालील प्रमेयात सांगितला आहे.

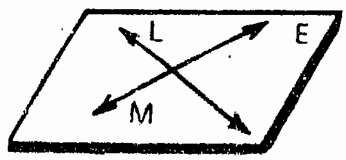
§ 1·15 ▪ **प्रतल निश्चितीचे पहिले प्रमेय :**

दिलेली रेषा व तिच्या बाहेरील एक बिंदू यांतून जाणारे एक आणि एकच प्रतल असते.

§ 1·16 आता आपण छेदणाऱ्या दोन रेषांमधून किती प्रतले जातात याचा विचार करू. वरीलप्रमाणे दोन बारीक सरळ तारा एकमेकींना टेकवून ठेवून, त्यांवर कार्डबोर्ड टेकवण्याचा प्रयोग करून पाहिल्यास आपल्याला खालील गुणधर्म पडताळून पाहता येईल. हा गुणधर्म प्रमेय 1·15 वरून सिद्ध करता येतो.

§ 1·17 ▪ **प्रतल निश्चितीचे दुसरे प्रमेय :**

एकमेकींना छेदणाऱ्या दोन भिन्न रेषांमधून जाणारे एक आणि एकच प्रतल असते.



आ. 1·22

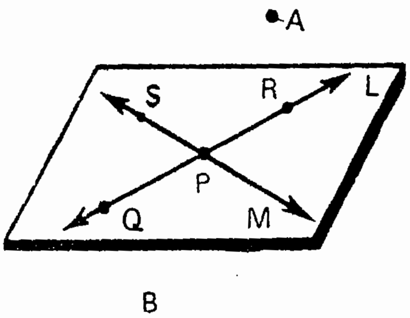
§ 1·18 **प्रश्न :**

1. एखादी रेषा निश्चित करण्यासाठी कमीत कमी किती बिंदू आवश्यक आहेत?
2. एखादे प्रतल निश्चित करण्यासाठी कमीत कमी किती बिंदू आवश्यक आहेत?

3. खालील पैकी कोणकोणत्या गोष्टींनी एक प्रतल निश्चित होते ?

(a) तीन नैकरषीय बिंदू, (b) तीन एकरेषीय बिंदू, (c) एक रेषा व तिच्या बाहेरील एक बिंदू,
(d) एकमेकींना छेदणाऱ्या दोन रेषा, (e) दोन समांतर रेषा, (f) दोन बिंदू.

4. आकृती 1·23 वरून खालील विधाने सत्य आहेत की असत्य आहेत ते सांगा.



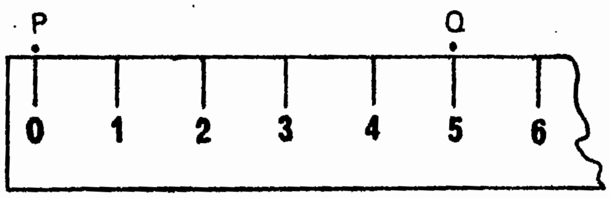
आ. 1·23

(a) L व M या रेषा E या प्रतलात आहेत.
(b) रेषा L ही E प्रतलाचा घटक आहे.
(c) रेषा L ही E प्रतलाचा उपसंच आहे.
(d) P बिंदू हा रेषा L व रेषा M यांचा घटक आहे.
(e) Q बिंदू हा रेषा M चा घटक नाही.
(f) B बिंदू, E प्रतलाचा घटक आहे.
(g) रेषा M ही E प्रतलात समाविष्ट आहे.
(h) E प्रतल A व B बिंदू यांतून जाते।

§ 1·19 अंतर (Distance) :

या प्रकरणातील पुढील परिच्छेदांत वास्तव संख्यांच्या केवलमूल्यांचा उपयोग आपण वारंवार करणार आहोत. वास्तव संख्यांच्या केवलमूल्यांची चर्चा बीजगणिताच्या पुस्तकात तपशिलाने केली आहे. पुढील परिच्छेद वाचण्यापूर्वी केवलमूल्यांच्या गुणधर्मांचा चांगला अभ्यास करणे आवश्यक आहे.

दोन बिंदूंमधील अंतर म्हणजे काय हे आपणास माहीत आहे. अंतर मोजण्यासाठी आपण निरनिराळ्या मापांचा किंवा परिमाणांचा (units) उपयोग करतो.



आ. 1·24

समजा दिलेल्या दोन बिंदूंमधील अंतर 5 इंच आहे. हेच अंतर $\frac{5}{12}$ फूट किंवा $\frac{5}{36}$ यार्ड आहे असे म्हणता येईल. तसेच हे अंतर 12·7 सेमी, 127 मिमी किंवा 0·127 मी. अशा अनेक पद्धतींनी दाखवता येईल. (या ठिकाणी 1 इंच = 2·54 सेमी हे प्रमाण गृहीत धरले आहे.)

यावरून आपल्याला असे दिसून येते की, अंतराचे माप भिन्न घेतल्यास, तेच अंतर निरनिराळ्या संख्यांनी दाखवता येते. पण अंतर मोजण्यासाठी नेहमी एकच माप घेतल्यास दोन बिंदूंमधील अंतर दाखवणारी संख्या प्रत्येक वेळी एकच राहील. शिवाय ही संख्या नेहमीच धन असते. हीच वस्तुस्थिती खालील गृहीतकात सांगितली आहे.

गृहीतक 5 : अंतराचे गृहीतक (Distance Postulate)

प्रत्येक दोन भिन्न बिंदूंच्या जोडीशी एक आणि एकच धन वास्तव संख्या निगडित असते.

व्याख्या : दिलेल्या दोन बिंदूंच्या जोडीशी, वरील गृहीतकाने निगडित केलेल्या (धन) वास्तव संख्येला त्या **दोन बिंदूंमधील अंतर** म्हणतात.

A व B या बिंदूंमधील अंतर '$d(A,B)$' या चिन्हाने दाखवतात.

A व B या बिंदूंमधील अंतर 5 असेल तर $d(A,B)=5$ असे लिहितात.

'A बिंदूपासून B चे अंतर' व 'B बिंदूपासून A चे अंतर' एकच आहे. म्हणून $d(A,B)=d(B,A)$

कोणत्याही बिंदूचे स्वतःपासून अंतर शून्य असते हे आपल्याला माहीतच आहे, म्हणजेच $A=B$ असेल तर $d(A,B)=0$.

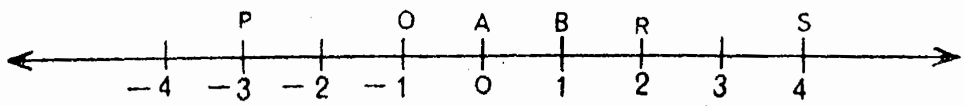
§ 1·20 रेषा व वास्तव संख्या :

वास्तव संख्या व रेषेवरील बिंदू यांची एकास-एक संगती (one-one correspondence) साधता येते हे तुम्हांला माहीतच आहे. या एकास-एक संगतीनुसार, प्रत्येक वास्तव संख्येकरता रेषेवर एक बिंदू [illegible] वास्तव संख्या असते.

जर x या संख्येचा, रेषेवरील संगत बिंदू P असेल तर ही गोष्ट आपण $x \rightarrow P$ या चिन्हाने दाखवू. ($x \rightarrow P$ हे चिन्ह 'x शी संगत P' असे वाचावे.) वरील एकास-एक संगतीमुळे, जर x संख्येशी P बिंदू संगत असेल तर P बिंदूशी x ही संख्या संगत असते. म्हणजेच '$x \rightarrow P$' असेल तर '$P \rightarrow x$' असते. म्हणून x व P यांतील संगती '$x \longleftrightarrow P$' या चिन्हाने दाखवतात. (हे चिन्ह 'x शी संगत P' आणि 'P शी संगत x' असे वाचतात.)

शून्याशी संगत असलेल्या बिंदूला आपण **आरंभबिंदू** (Origin) म्हणू.

आता संख्यारेषेवरून त्या रेषेवरील दोन बिंदूंमधील अंतर कसे काढता येते ते पाहू.



आ. 1·25

आकृती 1·25 मध्ये एक संख्यरेषा दाखवली आहे. जर $B \longleftrightarrow 1$ व $S \longleftrightarrow 4$ असेल तर B ते S हे अंतर 3 असते हे उघड आहे. (S बिंदू हा B बिंदूच्या 3 मापे उजवीकडे आहे.) हेच अंतर 1 व 4 या संख्यांच्या फरकाच्या केवलमूल्याएवढे आहे.

कारण, $|1-4|=|-3|=3$.

[illegible], P [illegible] 3 व R [illegible] असेल तर P ते R हे अंतर, आकृतीवरून, 5 आहे हे दिसून येते. −3 व 2 यांच्या फरकाचे केवलमूल्यही 5 आहे. ($|-3-2|=|-5|=5$.)

यावरून संख्यारेषेच्या साहाय्याने त्या रेषेवरील दोन बिंदूंमधील अंतर कसे काढता येते हे आपल्या लक्षात येते.

संख्यारेषा ही दोन्ही बाजूंना अमर्याद वाढलेली मोजपट्टी आहे अशीही कल्पना करता येईल.

वरील चर्चेचा सारांश आपण खालील गृहीतकाने व्यक्त करू.

गृहीतक 6 : मोजपट्टीचे गृहीतक (Ruler Postulate)

वास्तव संख्या व रेषेवरील बिंदू यांची अशी एक संगती प्रस्थापित करता येते की,

(1) रेषेच्या प्रत्येक बिंदूशी एक आणि एकच वास्तव संख्या निगडित असते.

(2) प्रत्येक वास्तव संख्येशी त्या रेषेचा एक आणि एकच बिंदू निगडित असतो. आणि,

(3) रेषेच्या कोणत्याही दोन बिंदूंमधील अंतर हे त्या बिंदूंच्या संगत संख्यांच्या फरकाच्या केवलमूल्याएवढे असते.

या गृहीतकात वर्णन केलेली, बिंदू व संख्या यांच्यातील संगती ही एकास-एक असते हे (1) व (2) वरून दिसून येईल. गृहीतकातील एकास-एक संगतीस **निर्देशक पद्धती** (Co-ordinate System) म्हणतात. अशा निर्देशक पद्धतीत कोणत्याही बिंदूच्या संगत संख्येस त्या बिंदूचा **निर्देशक** (Co-ordinate) म्हणतात व त्या बिंदूला त्याच्या संगत संख्येचा **आलेख** (Graph) म्हणतात. म्हणजेच, वरील निर्देशक पद्धतीत '$P \longleftrightarrow 3$' या विधानाचा अर्थ

(a) 'P बिंदूचा निर्देशक 3 आहे' असा होईल,

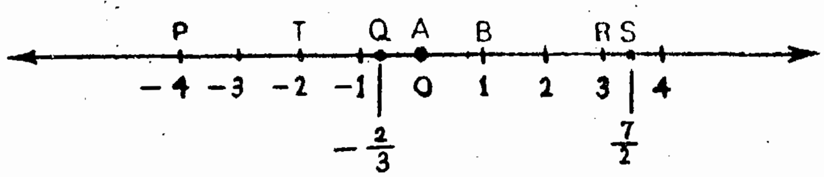
किंवा (b) '3 या संख्येचा आलेख P आहे' असा होईल.

'$P \longleftrightarrow 3$' हे विधान '$P = 3$' असेही लिहितात.

गृहीतकाच्या तिसऱ्या भागाचा अर्थ आपण समजावून घेऊ. जर $P \longleftrightarrow x$ व $Q \longleftrightarrow y$ असेल तर अंतर, $d(P, Q) = |x - y|$ उदाहरणार्थ, समजा, वरील निर्देशक पद्धतीत $R \longleftrightarrow -4$ व $S \longleftrightarrow 3$ आहे. तर $d(R, S) = |-4-3| = |-7| = 7$.

रेषेवरील निर्देशक पद्धतीला **रेषीय निर्देशक पद्धती** (Linear Co-ordinate System) असेही म्हणतात.

§ 1·21 **प्रश्न :** आ. 1·26 मध्ये एक रेषीय निर्देशक पद्धती दाखवली आहे. तिच्यावरून खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.



आ. 1·26

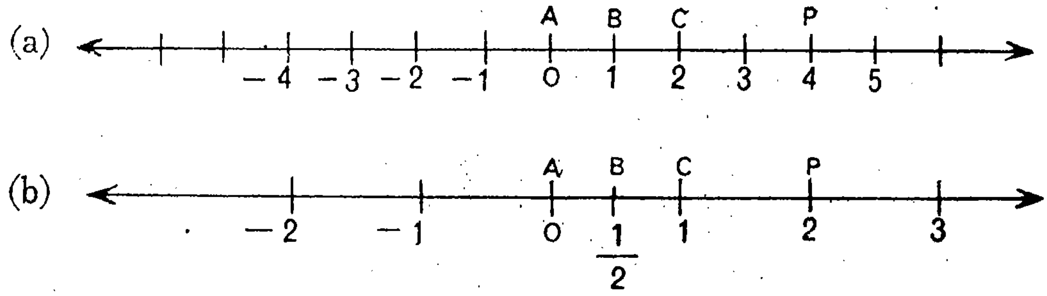
(a) $P \longleftrightarrow \ldots ?$; $T \longleftrightarrow \ldots ?$; $S \longleftrightarrow \ldots ?$.

(b) $-\frac{2}{3} \longleftrightarrow \ldots ?$; $\frac{7}{2} \longleftrightarrow \ldots ?$; $-2 \longleftrightarrow \ldots ?$.

(c) $d(P,Q) = \ldots ?$; $d(B,T) = \ldots ?$; $d(Q,S) = \ldots ?$; $d(T,R) = \ldots ?$.

(d) $d(P,Q)$ व $d(B,S)$ यांपैकी कोणते अंतर मोठे आहे ?

§ 1·22 दिलेल्या रेषेवर संख्यांचे अंकन अनेक प्रकारांनी होऊ शकते. खालील आकृतीत अशा दोन पद्धतींनी संख्यांचे अंकन केलेले दाखवले आहे. वेगळ्या अंकन पद्धती दाखवण्यासाठी दोन रेषा काढल्या असल्या तरी दोन्ही आकृती एकाच रेषेच्या आहेत असे गृहीत धरले आहे.



आ. 1·27

(b) पद्धतीतील अंतराचे माप (a) पद्धतीतील अंतराच्या मापाच्या दुप्पट घेतले आहे. (a) पद्धतीत, B व P बिंदूमधील अंतर 3 आहे, तर (b) पद्धतीत त्याच दोन बिंदूमधील अंतर $\frac{3}{2}$ आहे.

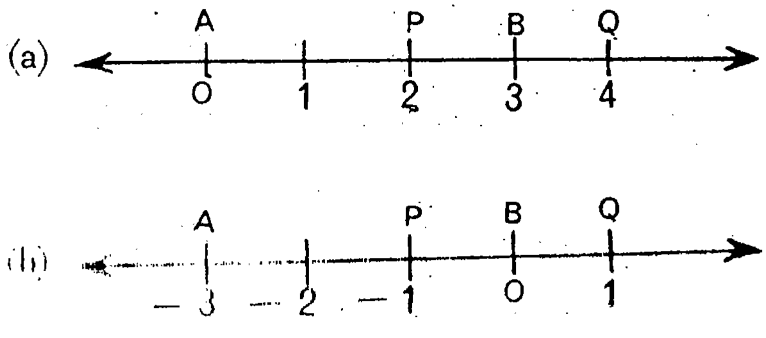
म्हणजेच वेगवेगळ्या अंकन पद्धतींप्रमाणे, दिलेल्या दोन बिंदूमधील अंतर वेगवेगळ्या संख्यांनी मापल्या जाईल. (दोन बिंदूमधील अंतर इंचांत 5 असेल तर सेमी मध्ये ते 12·7 येते.) जर P व Q या बिंदूशी अनुक्रमे x व y या संख्या संगत असतील तर $|x-y|$ ही संख्या या दोन पद्धतींत वेगळी येईल.

या दोन पद्धतींत, अंतरांची मापे वेगळी घेतल्यामुळे त्याच दोन बिंदूमधील अंतर दाखवणारी $|x-y|$ ही संख्या वेगळी येते.

म्हणून एखादया रेषेवर निर्देशक पद्धती स्थापण्यापूर्वी अंतराचे माप कायम केल्यास अशी परिस्थिती उद्भवणार नाही.

§ 1·23 मोजपट्टीच्या गृहीतकानुसार रेषेवर निर्देशक पद्धती बसवता येते हे आपण वर पाहिले. अशा निर्देशक पद्धतीत रेषेवरील एखादा विशिष्ट बिंदूच आरंभबिंदू घेतला पाहिजे, किंवा आरंभबिंदूच्या (रेषेवरील) विशिष्ट अंगासच धन संख्या दाखवल्या पाहिजेत, असे कोणतेही बंधन नसते.

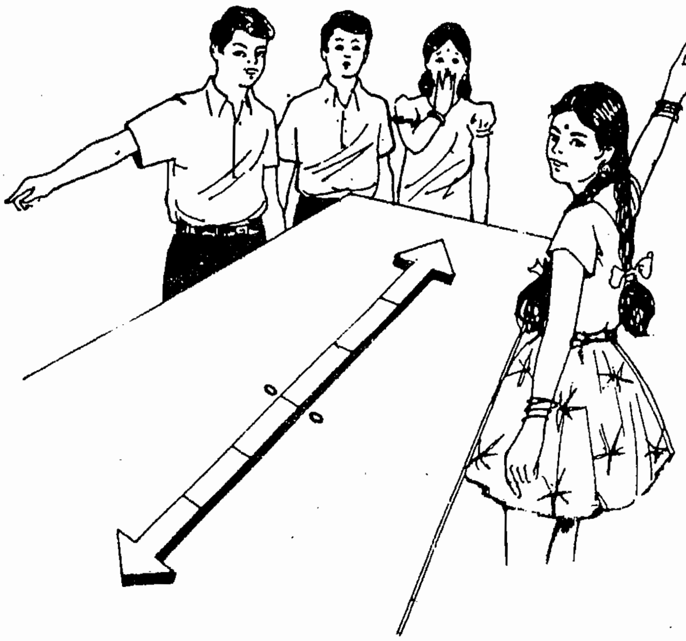
रेषेवरील आरंभबिंदू बदलला तर त्या रेषेवर वेगळी निर्देशक पद्धती मिळते. आ. 1·28 मध्ये, एकाच रेषेवरील, वेगळे आरंभबिंदू असलेल्या दोन निर्देशक पद्धती दाखवल्या आहेत. यांपैकी (a) पद्धतीत,



आ. 1·28

A हा आरंभ बिंदू असून (b) या पद्धतीत B हा आरंभबिंदू आहे. पहिल्या पद्धतीनुसार P बिंदूचा निर्देशक 2 आहे तर दुसऱ्या पद्धतीनुसार तो −1 आहे.

पुढील चित्र पाहा. एका रेषेच्या दोन बाजूंस दोन मुले उभी आहेत. दोघांनी त्या रेषेवर एकच आरंभबिंदू निवडला व अंतराचे मापही एकच घेतले. त्यांनी त्या रेषेवर आपआपल्या उजवीकडे धन संख्यांचे अंकन



करणे सुरू केले. तेव्हा आणखी एकाने विचारले, 'या रेषेची धन दिशा कोणती ?'

तुम्ही या प्रश्नाचे उत्तर काय दयाल ?

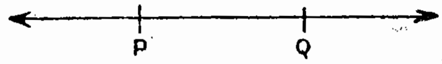
कोणत्याही रेषेची धन दिशा ही ठरलेली नसते. तर आपण आपल्या इच्छेनुसार व गरजेनुसार, रेषेवर, आरंभबिंदूच्या कोणत्याही एका अंगास धनसंख्यांचे अंकन करून या अंगास, त्या रेषेची धन **दिशा** किंवा धन **बाजू** म्हणू शकतो.

वरील चर्चेवरून आपल्याला दिसून येते की, रेषेवरील बिंदूंचे निर्देशक दोन गोष्टींवर अवलंबून असतात.

(1) आरंभबिंदूची निवड,

(2) रेषेवर धन दिशेची निवड.

आता समजा, P व Q हे दोन बिंदू दिले आहेत. रेषा PQ वर अशी निर्देशक पद्धती निवडायची आहे की, एका बिंदूचा (समजा Q चा) निर्देशक शून्य राहील व दुसऱ्याचा (P चा) निर्देशक धन राहील. अशी निर्देशक पद्धती या रेषेवर स्थापता येते. कारण Q बिंदू हा आरंभबिंदू निवडला म्हणून Q चा निर्देशक शून्य होईल. तसेच रेषेवरील Q च्या P अंगास (म्हणजे Q च्या ज्या बाजूस P आहे त्या बाजूस) धन दिशा निवडली तर P चा निर्देशक धन होईल.



आ. 1·29

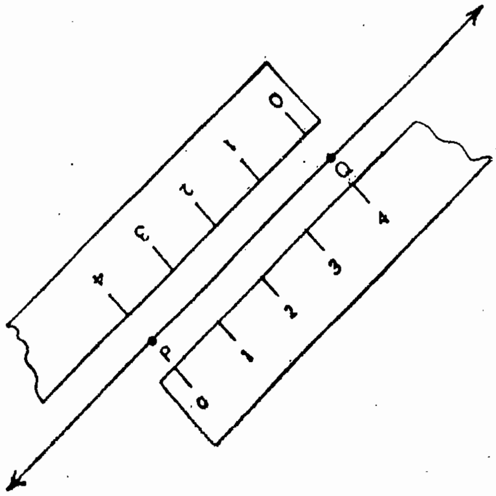
वरील चर्चेचा सारांश पुढील गृहीतकात सांगितला आहे.

गृहीतक 7 : मोजपट्टी स्थापनाचे गृहीतक (Ruler Placement Postulate)

कोणत्याही रेषेवर दोन भिन्न बिंदू दिले असता, एकाचा निर्देशक शून्य व दुसऱ्याचा निर्देशक धन असेल अशी निर्देशक पद्धती, त्या रेषेवर स्थापता येते.

समजा, P व Q हे दोन बिंदू दिले आहेत. तर या गृहीतकानुसार, P चा निर्देशक शून्य व Q चा निर्देशक धन राहील अशी एक निर्देशक पद्धती रेषाPQ वर घेता येते. तसेच Q चा निर्देशक शून्य व P चा निर्देशक एक धन संख्या राहील अशीही निर्देशक पद्धती निवडता येते. अर्थात कोणतीही पद्धती घेतली तरी P व Q मधील अंतर तेच असते.

मोजपट्टी स्थापनाच्या गृहीतकामुळे दोन बिंदूमधील अंतर आता जास्त सुलभपणे काढता येईल. मोजपट्टीच्या गृहीतकानुसार अंतर हया बिंदूंना संगत संख्यांच्या फरकाच्या केवल-मूल्याएवढे असते. परंतु आता, वरील गृहीतकानुसार, एका बिंदूची संगत संख्या शून्य घेतली व दुसऱ्याची संगत संख्या धन घेतली तर त्या बिंदूमधील अंतर हे त्या धन संख्येएवढे होईल.



आ. 1·30

आपण काय शिकलो ?

(1) **संज्ञा–व्याख्या :**

एकरेषीयता; एकप्रतलीयता, एक आणि एकच; व्याख्या; अंतर; आरंभबिंदू; निर्देशक; आलेख.

(2) **कल्पना :**

(i) भूमितीतील उदाहरणे सोडवणे, सिद्धता देणे; तर्कशुद्ध विचार करणे; कारणमीमांसा करणे.

(ii) बिंदू, रेषा, प्रतल आदींचे जे गुणधर्म सत्य आहेत असे आपण गृहीत धरतो **त्यांना गृहीतके** म्हणतात.

(iii) गृहीतकावरून तर्कशुद्ध पद्धतीने काढलेल्या महत्वाच्या निष्कर्षांना व गुणधर्मांना **प्रमेय** म्हणतात.

(3) **गृहीतके :**

(i) रेषा (ii) प्रतल निश्चिती

(iii) सपाट प्रतल (iv) प्रतल छेदन

(v) अंतर (vi) मोजपट्टी

(vii) मोजपट्टी स्थापन

(4) **प्रमेये :**

(i) रेषाछेदन (iii) प्रतल निश्चिती–1

(ii) प्रतल-रेषा छेदन (iv) प्रतल निश्चिती–2.

प्रश्नसंग्रह

1. दोन भिन्न बिंदू किती रेषा निश्चित करतात? तीन नैकरेषीय बिंदू व चार नैकरेषीय बिंदू अनुक्रमे किती रेषा निश्चित करतात?
2. (a) चार नैकरेषीय बिंदूपैकी तीन बिंदू एकरेषीय असू शकतील का?
   (b) तीन भिन्न बिंदू एकच रेषा निश्चित करतात हे कोणत्या परिस्थितीत शक्य आहे?
   (c) तीन बिंदू नेमक्या दोन रेषा निश्चित करू शकतात का?
3. रिकाम्या जागा भरा व पुढील विधाने पूर्ण करा.
   (a) दोन भिन्न रेषा एकमेकींस छेदत असतील तर, त्यांच्या छेदसंचात.........असतो.
   (b) दोन भिन्न प्रतले एकमेकांस छेदत असतील तर, त्यांचा छेदसंच म्हणजे.........असते.
   (c) दिलेल्या प्रतलास, त्या प्रतलाबाहेरील एक रेषा छेदत असेल तर त्यांच्या छेदसंचात......... असतो.
   (d) दिलेल्या सर्व बिंदूंना.........तर ते बिंदू एकरेषीय असतात.
   (e) दिलेल्या सर्व बिंदूंना.........तर ते बिंदू नैकप्रतलीय असतात.
4. खालील विधानांतील रिकाम्या जागी, 'एक तरी', 'जास्तीत जास्त एक' आणि 'एक आणि एकच' यांपैकी योग्य शब्द वापरून विधाने पूर्ण करा.
   (a) दोन भिन्न रेषांच्या छेदसंचात.........बिंदू असतो.
   (b) कोणत्याही दोन बिंदूतून.........रेषा जाते.
   (c) कोणत्याही बिंदूतून.........रेषा जाते.
   (d) एकमेकींना छेदणाऱ्या रेषांतून.........प्रतल जाते.
5. खालील व्याख्या 'जर–तर–' स्वरूपात लिहून त्या व्याख्येतील दुसरा अर्थ स्पष्ट करा.
   (a) दोन भुजा एकरूप असलेला त्रिकोण समद्विभुज असतो.
   (b) ज्याचे तीनही कोन एकरूप असतात तो त्रिकोण समकोन त्रिकोण असतो.
   (c) अठरापेक्षा जास्त वय असलेल्या मुलाला सज्ञान म्हणतात.
   (d) दोनने भाग जाणाऱ्या संख्येला सम संख्या म्हणतात.
6. खाली काही बिंदूंच्या जोड्यांचे निर्देशक दिले आहेत. यावरून प्रत्येक जोडीमधील अंतर काढा.
   (a) 3 व 6, (b) -9 व -1, (c) -4 व 5,
   (d) x व $-x$, (e) $x+3$ व $x-3$, (f) $x+y$ व $x-y$.
7. एका दिलेल्या रेषीय निर्देशक पद्धतीत $P \longleftrightarrow x$. आरंभबिंदू 2 मापे उजवीकडे नेल्यास P चा निर्देशक काय होईल? तो 3 मापे डावीकडे नेल्यास P चा निर्देशक काय होईल? (आरंभबिंदूच्या उजवीकडे धन दिशा आहे असे गृहीत धरा.)
8. L रेषेवरील एका निर्देशक पद्धतीनुसार, त्या रेषेवरील P, Q, R या बिंदूंचे निर्देशक अनुक्रमे x, y, z आहेत. $z=\dfrac{x+2y}{3}$ हे दिले आहे.
   (i) जर $x=-4$, $y=8$, तर $z=$?
   (ii) जर $x=-2$, $y=5\frac{1}{2}$, तर $z=$?
   (iii) जर $x=-1$, $y=2$, तर $z=$?
   (iv) जर $x=4$, $z=2$, तर $y=$?
   (v) जर $y=-5$, $z=3$, तर $x=$?
   वरील माहितीवरून, $d(P,Q)$, $d(Q,R)$ आणि $d(P,R)$ ही अंतरे काढा.

9. L रेषेवरील दिलेल्या निर्देशक पद्धतीनुसार, P, Q, R या बिंदूंचे निर्देशक अनुक्रमे 3, 5 व 6 आहेत. तर खालील विधाने सत्य आहेत की असत्य आहेत ते सांगा.

(i) $d(P,Q)+d(Q,R)=d(P,R)$,

(ii) $d(P,R)+d(R,Q)=d(P,Q)$,

(iii) $d(R,P)+d(P,Q)=d(R,Q)$.

पारिभाषिक शब्द

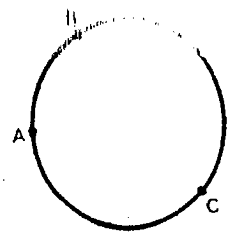
आरंभबिंदू – Origin
आलेख – Graph
एक आणि एकच – One and only one
एकप्रतलीय – Coplanar
एकप्रतलीयता – Coplanarity
एकरेषीय – Collinear
एकरेषीयता – Collinearity
एकास-एक-संगती – One-one-correspondence
अंतर – Distance
गृहीतक – Postulate
छेदन – Intersection
निगडित – Associated
निर्देशक – Co-ordinate
निर्देशक पद्धती – Co-ordinate System
रेषीय निर्देशक पद्धती – Linear Co-ordinate System
नैकप्रतलीय – Non-coplanar
प्रतल – Plane
प्रमेय – Theorem
बिंदू – Point
मोजपट्टी – Ruler
मोजपट्टी स्थापनाचे – Ruler Placement
रेषा – Line
व्याख्या – Definition
सपाट – Flat
सिद्धता – Proof
संगत – Corresponding

प्रकरण 2

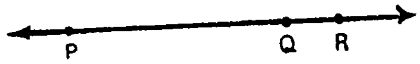
दरम्यानता व बहिर्वक्र संच

§ **2·1** आकृती 2·1 पाहा.

या आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे एका वर्तुळावर A, B, C हे तीन बिंदू दिले आहेत. त्यांपैकी अमुकच एक बिंदू, इतर दोघांच्या दरम्यान आहे असे आपण म्हणू शकत नाही.



आ. 2·1



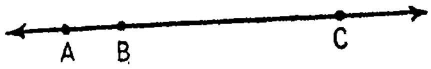
आ. 2·2

आता आ. 2·2 पाहा. येथे एका रेषेवर तीन बिंदू P, Q, R दिले आहेत.

यांपैकी एक विशिष्टच बिंदू इतर दोघांच्या दरम्यान आहे असे आपण सांगू शकतो. (दिलेल्या आकृतीत कोणता बिंदू इतर दोघांच्या दरम्यान आहे ?)

म्हणजे बिंदूंची दरम्यानता ही एकरेषीय बिंदूंच्याच बाबतीत सांगता येते; वर्तुळावरील बिंदूंच्या बाबतीत ती सांगता येत नाही. रेषेवरच्या बिंदूंमधील दरम्यानता संबंधाचा अभ्यास, वास्तव संख्यांच्या मदतीने आता आपण अधिक विस्ताराने करणार आहोत.

व्याख्या : A, B, C हे बिंदू एकाच रेषेवर असून जर $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$ असेल तर B बिंदू, A आणि C बिंदूंच्या दरम्यान आहे असे मानतात.



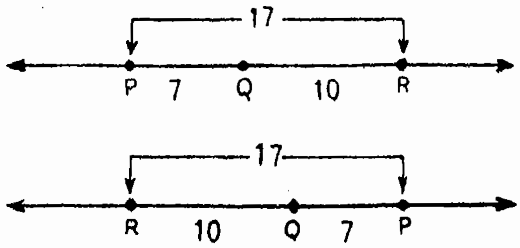
आ. 2·3

'B हा A व C यांच्या दरम्यान आहे' आणि 'B हा C व A यांच्या दरम्यान आहे.' ही विधाने समानार्थी आहेत.

§ **2·2** स्पष्टीकरणासाठी खाली काही उदाहरणे दिली आहेत.

1. समजा, P, Q, R या एकरेषीय बिंदूंमधील अंतराबाबत पुढील माहिती दिली आहे. (आ. 2·4)

$d(P, R) = 17$, $d(Q, R) = 10$
व $d(P, Q) = 7$.
येथे $d(P, Q) + d(Q, R)$
$= 7 + 10$
$= 17$
$= d(P, R)$.
म्हणून, Q हा बिंदू P आणि R या बिंदूंच्या दरम्यान आहे.


आ. 2·4

2. समजा, $d(P, R) = 4$, $d(Q, R) = 3$, व $d(P, Q) = 7$ अशी अंतरे दिली आहेत. (P, Q, R) एकरेषीय आहेतच.

येथे, Q हा P व R यांच्या दरम्यान आहे असे म्हणता येईल काय?

$d(Q, P) + d(Q, R) = 7 + 3$
$= 10$
पण $d(P, R) = 4$.
$\therefore d(P, Q) + d(Q, R) \neq d(P, R)$.
$\therefore$ **Q हा P व R यांच्या दरम्यान आहे असे म्हणता येणार नाही.**

पण याच उदाहरणात, P किंवा R यांपैकी एखादा बिंदू, इतरांच्या दरम्यान आहे काय? असल्यास कोणता?

दिलेल्या तीन एकरेषीय बिंदूंपैकी एक बिंदू इतर दोन बिंदूंच्या दरम्यान असण्यासाठी, त्या बिंदूंमधील अंतरांमध्ये कोणता संबंध असावा लागतो, हे वरील उदाहरणांवरून स्पष्ट होईल.

जेव्हा, 'Q बिंदू P आणि R या बिंदूंच्या दरम्यान आहे' असे विधान दिले असेल, तेव्हा त्याचा अर्थ,

P, Q व R हे बिंदू एकाच रेषेत आहेत,

आणि, $d(P, Q) + d(Q, R) = d(P, R)$ असा होतो.

§ 2·3 'दरम्यानता' दर्शक चिन्ह :

'B हा बिंदू A व C या बिंदूंच्या दरम्यान आहे' हे विधान, A—B—C किंवा A (B) C असे लिहितात.

'B हा बिंदू A व C या बिंदूंच्या दरम्यान आहे' आणि, 'B हा बिंदू C व A या बिंदूंच्या दरम्यान आहे' ही विधाने समानार्थी असतात. त्यामुळे

A – B – C आणि C – B – A ही विधाने देखील समानार्थी ठरतात.

§ 2·4 प्रश्न :

1. P, Q आणि R हे एकरेषीय बिंदू आहेत, तर,

(a) पुढीलपैकी कोणत्या परिस्थितीत, Q हा बिंदू P व R या बिंदूंच्या दरम्यान राहील ते ओळखा.

(i) $d(P, Q) = 3$, $d(Q, R) = 5$, $d(P, R) = 8$.
(ii) $d(P, Q) = 22$, $d(Q, R) = 8$, $d(P, R) = 14$.
(iii) $d(P, Q) = 6$, $d(P, R) = 104$, $d(Q, R) = 98$.

(b) पुढीलपैकी कोणत्या परिस्थितीत, R हा बिंदू P व Q या बिंदूंच्या दरम्यान राहील ते ओळखा.

(i) $d(P, Q)=2$, $d(Q, R)=1\frac{1}{2}$, $d(P, R)=\frac{1}{2}$.
(ii) $d(P, R)=7$, $d(Q, R)=8$, $d(P, Q)=15$.
(iii) $d(Q, R)=8$, $d(P, Q)=26$, $d(P, R)=34$.

(c) पुढीलपैकी प्रत्येक वेळी, Q–P–R हे विधान सत्य असण्यासाठी मोकळ्या जागी योग्य संख्या भरा.

(i) $d(Q, P)=5$, $d(P, R)=7$, $d(Q, R)=\ldots$
(ii) $d(P, Q)=6$, $d(P, R)=5$, $d(Q, R)=\ldots$
(iii) $d(Q, R)=10$, $d(Q, P)=3$, $d(P, R)=\ldots$

2. एका रेषेवरील A, B व C या बिंदूंची आपआपसांतील अंतरे पुढीलप्रमाणे असल्यास, त्यांपैकी कोणता बिंदू, इतर दोहोंच्या दरम्यान आहे ते ओळखा.

(i) $d(A, B)=5$, $d(B, C)=10$, $d(A, C)=15$.
(ii) $d(A, C)=15$, $d(B, C)=7$, $d(A, B)=8$.
(iii) $d(B, C)=23{\cdot}2$, $d(A, B)=2{\cdot}8$, $d(A, C)=26$.

3. पुढील विधानात, रिकाम्या जागी योग्य माहिती भरा.

P, Q, R या बिंदूंपैकी, Q पासून P व R यांच्या अंतरांची बेरीज, जर ——— व ——— या बिंदूंमधील अंतराएवढी असेल तर, ——— हा बिंदू ——— व ——— या बिंदूंच्या दरम्यान असतो.

4. S, T व R हे एकरेषीय बिंदू असून $d(S, R)=9$, आणि $d(S, T)=5$ आहे, तर R हा बिंदू S व T या बिंदूंच्या दरम्यान राहू शकेल काय? कारणे द्या.

§ 2·5 दरम्यानता आणि वास्तव संख्या :

दरम्यानतेचे काही गुणधर्म आपण पूर्वी पाहिले आहेत. तेच गुणधर्म, वास्तव संख्यांच्या साहाय्याने आपण आता व्यक्त करणार आहोत. क्रमसंबंधानुसार (order) एक वास्तव संख्या दुसऱ्या दोन वास्तव संख्यांच्या दरम्यान असते असे केव्हा म्हणता येते?

a, b आणि c या तीन वास्तव संख्या असून जर $a<b<c$ किंवा $c<b<a$ असेल तर b ही a व c यांच्या दरम्यान आहे असे आपण म्हणतो.

(1) **A, B, C ह्या तीन एकरेषीय बिंदूंचे निर्देशक अनुक्रमे x, y, z असतील आणि $x<y<z$ असेल तर B हा A व C यांच्या दरम्यान असतो.**

म्हणजे, जर $A=x$, $B=y$ व $C=z$ आणि $x<y<z$ असेल तर B हा A व C यांच्या दरम्यान असतो.

समजा, $A=2$, $B=7$ व $C=10$; म्हणून, B हा A व C यांच्या दरम्यान आहे. (म्हणजेच, A–B–C).

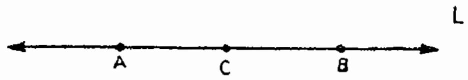
उदा० समजा, $A=7$, $B=-2$ व $C=x$ आणि $x<-3$.

अशा स्थितीत, $x<-2<7$ होईल.

म्हणून, B हा A व C यांच्या दरम्यान (C – B – A) राहील.

(2) रेषेवरील कोणत्याही दोन भिन्न बिंदूंच्या दरम्यान एक तरी बिंदू असतोच.

उदा० A व B हे रेषा L चे दोन भिन्न बिंदू आहेत. तर A व B या बिंदूंच्या दरम्यान राहील असा एक तरी बिंदू C, रेषा L वर असलाच पाहिजे.

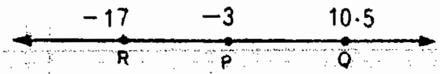


आ. 2·5

(3) रेषेच्या दिलेल्या तीन बिंदूंपैकी एक आणि एकच बिंदू इतर दोहोंच्या दरम्यान असतो.

उदा० समजा, P, Q, R हे एकरेषीय बिंदू असून $P=-3$, $Q=10{\cdot}5$ व $R=-17$ आहे.

तर $-17<-3<10{\cdot}5$ असल्यामुळे, P हा R आणि Q यांच्या दरम्यान आहे.



आ. 2·6

या स्थितीत, Q हा P व R यांच्या दरम्यान नाही. तसेच R हा P व Q यांच्या दरम्यान नाही.

म्हणजे, P, Q व R हे एका रेषेवरील तीन बिंदू असतील, तर त्यांपैकी एक तरी बिंदू इतर दोहोंच्या दरम्यान असतो. जर P हा बिंदू Q व R यांच्या दरम्यान असेल, तर Q (तसेच R) हा बिंदू इतर दोहोंच्या दरम्यान असणार नाही.

§ 2·6 प्रश्न :

1. खालीलपैकी कोणते विधान असत्य आहे ?

   (i) दोन भिन्न बिंदूंच्या दरम्यान असंख्य बिंदू असतात.

   (ii) दिलेल्या दोन भिन्न बिंदूंच्या दरम्यान निदान एक तरी बिंदू असतो.

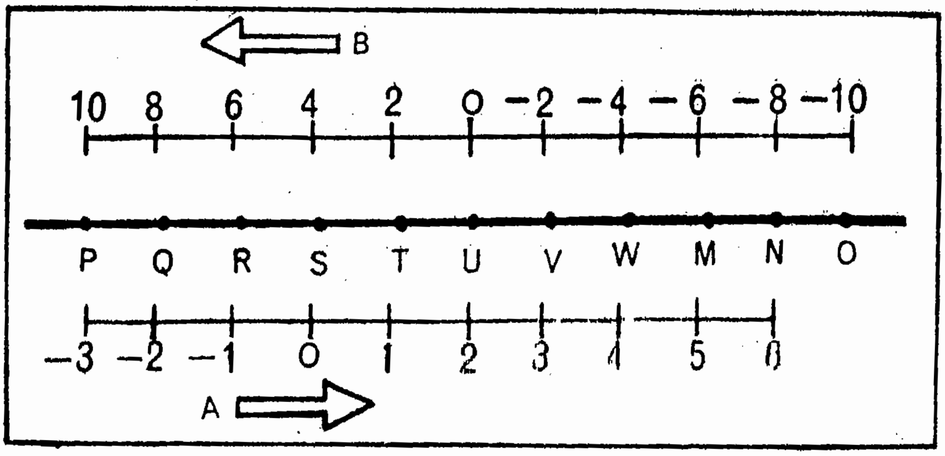
   (iii) ज्यांच्या दरम्यान एकही बिंदू असणार नाही अशा दोन भिन्न बिंदूंच्या अनेक जोड्या असतात.

2. खालीलपैकी प्रत्येक उदाहरणात संख्यांची एकेक जोडी दिली आहे. या जोडीच्या संख्यांमधील रिकाम्या चौकोनात, त्या दोन संख्यांच्या दरम्यान असणाऱ्या कोणत्याही संख्या लिहा.

   (i) 7, □, 10. (ii) 3, □, 4. (iii) −3, □, 2.

   (iv) 6, □, □, 1. (v) 1, □, □, 2. (vi) 6, □, □, 8.

3. खाली दिलेल्या आकृतीच्या (आ. 2·7) साहाय्याने पुढील उदाहरणे (i) ते (viii) सोडवा.



आ. 2·7

(i) L रेषेवरील बिंदूंचे, दोन्ही पद्धतींनुसार निर्देशक लिहा.

L रेषेवरील बिंदू	पद्धती A नुसार निर्देशक	पद्धती B नुसार निर्देशक
P	−3	10
Q		
R		
S	0	
T		
U		0
V		
W		
M		
N	6	

(ii) खालील तक्त्यात, दिलेल्या संख्येपुढे, A व B या दोन्ही पद्धतींनुसार येणारे, L रेषेवरील संगतबिंदू कोणते ते लिहा.

निर्देशक संख्या	निर्देशक पद्धती A नुसार, L रेषेवरील संगतबिंदू	निर्देशक पद्धती B नुसार, L रेषेवरील संगतबिंदू
−2	Q	V
0		U
2		
4		
6		

(iii) 7, $-5\frac{1}{2}$, 0 या तीन संख्यांपैकी $-5\frac{1}{2}$ ही 0 पेक्षा लहान आणि 0 ही 7 पेक्षा लहान आहे म्हणून त्यांची चढत्या क्रमाने मांडणी $-5\frac{1}{2} < 0 < 7$ अशी लिहिता येते. तर,

(a) निर्देशक पद्धती A नुसार, P, Q व R बिंदूंच्या निर्देशकांची मांडणी चढत्या क्रमाने लिहा.

(b) निर्देशक पद्धती B नुसार P, Q व R बिंदूंच्या निर्देशकांची मांडणी चढत्या क्रमाने लिहा.

(iv) अंतराच्या गृहीतकानुसार, केवलमूल्याचा वापर करून खालील तक्त्यात दिलेल्या दोन दोन बिंदूंमधील अंतरे, दोन्ही निर्देशक पद्धतींत लिहा.

बिंदू	निर्देशक पद्धती A	निर्देशक पद्धती B
P, Q	$\lvert(-3)-(-2)\rvert = 1$	$\lvert 10-8 \rvert = 2$
S, M		
T, V		

(v) दरम्यानतेच्या व्याख्येनुसार, R, S, T यांपैकी S हा बिंदू R व T यांच्या दरम्यान आहे. म्हणजे R–S–T–कारण, $d(R, S) + d(S, T) = d(R, T)$.

पुढील पृष्ठावरील तक्त्यात दिलेल्या तीन तीन बिंदूंपैकी दरम्यानचा बिंदू कोणता हे वरीलप्रमाणे कारण देऊन लिहा.

बिंदू	दरम्यानता	कारण
R, T, S	R–S–T	$d(R,S) + d(S,T) = d(R,T)$
Q, W, S		
M, N, R		
Q, T, V		

(vi) $d(R, S)$, $d(S, T)$ आणि $d(R, T)$ ही अंतरे, निर्देशक पद्धती A व B नुसार केवलमूल्यांच्या साहाय्याने काढा आणि त्या आधारे R–S–T हे कसे सत्य आहे ते तपासून पाहा.

	निर्देशक पद्धती A	निर्देशक पद्धती B
R चा निर्देशक		
S चा निर्देशांक		
T चा निर्देशक		
$d(R, S)$	$\lvert \quad \rvert =$	$\lvert \quad \rvert =$
$d(S, T)$	$\lvert \quad \rvert =$	$\lvert \quad \rvert =$
$d(R, T)$	$\lvert \quad \rvert =$	$\lvert \quad \rvert =$
$d(R, S) + d(S, T)$		
R, S, T यांच्या निर्देशकांची चढत्या क्रमाने मांडणी	☐ < ☐ < ☐	☐ < ☐ < ☐

(vii) P–Q–R; T–U–N; V–W–M; P–M–T ह्या दरम्यानतासंबंधांची सत्यासत्यता वरील उदाहरण (vi) मधील पद्धतीने तपासून पाहा.

(viii) उदाहरण (vi) आणि (vii) वरून, दरम्यान असलेला बिंदू आणि चढत्या क्रमाने त्यांच्या निर्देशकांच्या मांडणीत त्या बिंदूचे स्थान पाहा. त्यावरून, खाली दिलेले विधान, रिकाम्या जागी योग्य शब्द किंवा संख्या घालून पूर्ण करा.

a, b, c ह्या वास्तव संख्या असून $a < b < c$ तर कोणत्याही निर्देशक पद्धतीत, ------- आलेख बिंदू, ------- आणि ------- यांच्या आलेखबिंदूंच्या ------- असतो.

4. P, Q, R या एकरेषीय बिंदूंबाबत,
$d(P, Q) + d(Q, R) = d(P, R)$ दिले आहे. तर सिद्ध करा की,
$d(Q, P) + d(P, R) = d(Q, R)$ हे असत्य आहे.

5. A, B, C या एकरेषीय बिंदूंचे निर्देशक अनुक्रमे x, y, z आहेत. B हा A व C यांच्या दरम्यान आहे (म्हणजेच A–B–C). यांवरून पुढील विधान रिकाम्या जागी योग्य संख्या घालून पूर्ण करा.
एकतर — < — < —, किंवा — < — < — खरे असते.

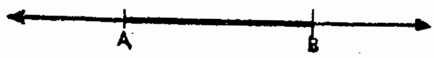
§ 2·7 रेषाखंड (Segment) आणि किरण (Ray) :

रेषाखंड व किरण यांची माहिती यापूर्वी आपल्याला झाली आहेच. आता दरम्यानतेच्या कल्पनेच्या आधारे त्यांच्या व्याख्या आपण करू.

व्याख्या : रेषाखंड AB

समजा, A व B हे दोन बिंदू दिले आहेत. तर A व B हे दोन बिंदू आणि A व B यांच्या दरम्यान असणारे सर्व बिंदू यांच्या संचास रेषाखंड AB म्हणतात.

रेषाखंड AB आणि रेषाखंड BA हे संच समान (म्हणजे एकच) असतात, हे उघड आहे.



आ. 2·8

A आणि B या बिंदूंना रेषाखंड AB ची **टोके** किंवा **अंत्यबिंदू** (End Points) म्हणतात. रेषाखंड AB संक्षेपाने, रेख AB असा लिहितात. A आणि B हे अंत्यबिंदू असणाऱ्या रेषाखंडास, 'A आणि B यांना जोडणारा रेषाखंड' असे म्हणतात.

§ 2·8 रेषाखंडाची लांबी व एकरूप रेषाखंड :

व्याख्या : दिलेल्या रेषाखंडाच्या अंत्यबिंदूमधील अंतरास त्या **रेषाखंडाची लांबी** असे म्हणतात.

रेखAB ची लांबी, $l(AB)$ ने दाखवतात. अर्थात, आपण A आणि B या बिंदूंमधील अंतर $d(A, B)$ या चिन्हाने दाखवीत असल्यामुळे

$$l(AB) = d(A, B).$$

येथे दोन्ही चिन्हांनी वास्तव संख्याच दाखवल्या आहेत. पण $d(A, B)$ ने A व B या दोन बिंदूंशी अंतर या नात्याने संबंधित असलेली संख्या दाखवली आहे तर $l(AB)$ ने मात्र रेख AB या संचाशी, लांबी या नात्याने संबंधित असलेली संख्या दाखवली आहे.

व्याख्या : दोन रेषाखंड जर समान लांबीचे असतील तर त्यांना **एकरूप रेषाखंड** म्हणतात.

समजा, रेखAB आणि रेखCD यांबाबत $l(AB) = l(CD)$ दिले आहे. तर आपण रेखAB आणि रेखCD यांना एकरूप रेषाखंड म्हणू. ही एकरूपता, रेखAB $\cong$ रेखCD अशी दाखवतात.

या व्याख्येमुळे, $l(AB) = l(CD)$ आणि रेख AB $\cong$ रेखCD ही सर्वस्वी समानार्थी विधाने होतात.

व्याख्या : दिलेल्या दोन रेषाखंडांपैकी, ज्याची लांबी, दुसऱ्यापेक्षा जास्त असेल (मोठी असेल) तो रेषाखंड दुसऱ्या रेषाखंडापेक्षा **मोठा** आहे असे म्हणतात.

म्हणजे, समजा रेख PQ आणि रेख RS हे दोन रेषाखंड दिले आहेत व $l(RS) > l(PQ)$. तर रेख RS हा रेख PQ पेक्षा मोठा आहे असे आपण म्हणू आणि चिन्हाने, ते

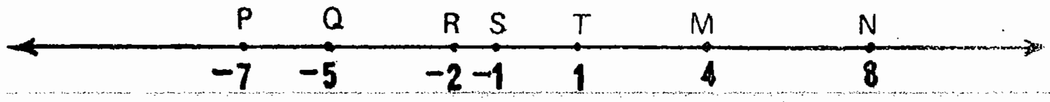
रेख RS > रेख PQ

असे दाखवू.

अशा वेळी, रेख PQ हा रेख RS पेक्षा लहान आहे असेही म्हणतात व हे 'रेख PQ < रेख RS' असे लिहितात.

§ 2·9 प्रश्न :

1. दिलेल्या माहितीच्या आधारे, रिकाम्या जागी योग्य त्या रेषाखंडाचे नाव लिहा.
   $l(PQ)=7$, $l(QT)=8$, $d(R, M)=8$, $d(P, N)=7$ तर,
   रेख PQ ≅ ......
   रेख PN ≅ ......
   रेख RM ≅ ......
2. आकृती 2·9 वरून, त्या खालील अपूर्ण विधाने, योग्य माहिती भरून पूर्ण करा.



आ. 2·9

रेखPQ ≅ ..., रेखQR ≅ ..., रेखPR ≅ ...

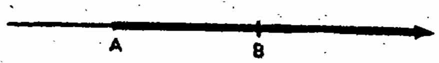
रेखPR हा ———, ———, ——— यांपैकी प्रत्येक रेषाखंडाहून मोठा आहे.

रेखQM हा रेख RN हून ——— आहे.

3. पुढील विधाने खरी की खोटी ते ओळखा.
   (i) एका रेषाखंडाच्या टोकांमधील अंतर हे दुसऱ्या रेषाखंडाच्या टोकांमधील अंतराएवढे असेल तर ते दोन रेषाखंड एकरूप असतात.
   (ii) दोन रेषाखंड एकरूप असणे म्हणजे ते रेषाखंड समान असणे होय.
   (iii) एकरूप रेषाखंडांच्या लांबी समान असतात.

§ 2·10 किरण AB :

खालील आकृतीत, किरण AB ठळक करून दाखवला आहे.



आ. 2·10

किरण AB वर, रेषा AB चे कोणते बिंदू नसतात ? रेषा AB वरील ज्या P बिंदूमुळे A हा P व B यांच्या दरम्यान ठरतो (P−A−B), असे सर्व P बिंदू वगळल्यास, रेषा AB च्या उरलेल्या बिंदूंचा संच म्हणजेच आपल्याला अभिप्रेत असलेला किरण AB होय. किरण AB वर कोणते बिंदू असावेत हे पुढील पृष्ठावरील व्याख्येत सांगितले आहे.

व्याख्या : समजा A व B हे दोन बिंदू दिले आहेत. तर,

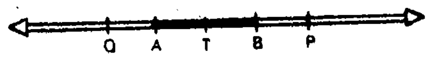
A व B हे दोन बिंदू,

A व B यांच्या दरम्यानचे सर्व बिंदू आणि रेषा AB वरील ज्या Q बिंदूमुळे A व Q यांच्या दरम्यान B असतो, (म्हणजे A–B–Q) असे सर्व Q बिंदू यांच्या संचास **किरण** AB (Ray AB) असे म्हणतात.

A बिंदूला, किरण AB चा **अंत्यबिंदू** (End Point) म्हणतात.

प्रत्येक किरणाला एक आणि एकच अंत्यबिंदू असतो.

आता बाजूची आकृती पाहा. या आकृतीत किरण AB व किरण BA दाखवले आहेत.



आ. 2·11

किरण AB व किरण BA हे भिन्न आहेत हे उघड आहे.

किरण AB व किरण BA यांच्यात काय फरक आहे हे नीट लक्षात घ्या.

(1) किरण AB वर असलेले पण किरण BA वर नसलेले काही बिंदू दाखवा.

(2) किरण AB व किरण BA या दोन्हींवर असणारे बिंदू कोणते ?

(3) रेख AB चा प्रत्येक बिंदू (i) किरण AB मध्ये आहे काय ? (ii) किरण BA मध्ये आहे काय ?

किरण AB व किरण BA यांच्या समाईक बिंदूंचा संच म्हणजेच रेख AB होय.

म्हणजे किरण AB ∩ किरण BA = रेख AB.

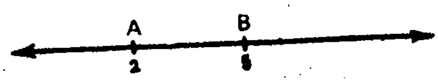
§ 2·11 प्रश्न :

1. किरण PQ चा अंत्यबिंदू कोणता ?
2. किरण QP चा अंत्यबिंदू कोणता ?
3. K हा ज्याचा अंत्यबिंदू आहे व D हा ज्याचा दुसरा कोणताही एक बिंदू आहे, अशा किरणाचे नाव काय ?



आ. 2·12

4. बाजूला दिलेल्या आकृतीवरून किरण AB ची आणखी तीन नावे लिहा.
5. किरण CB व किरण MN समान असल्यास,
   (i) C आणि M हे बिंदू भिन्न असू शकतील काय ?
   (ii) B आणि N हे बिंदू भिन्न असू शकतील काय ?
6. खालील विधान पूर्ण करा.
   किरण TM व किरण —— यांचा छेदसंच, रेख TM असतो.
7. खालील आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे, A चा निर्देशक 2 आहे व B चा निर्देशक 5 आहे.



आ. 2·13

P हा रेषा AB वरील बिंदू असून त्याचा निर्देशक x आहे तर रिकाम्या जागी योग्य माहिती भरून पुढील पृष्ठावरील विधाने पूर्ण करा.

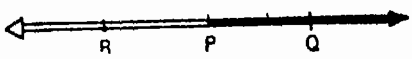
(i) जर P हा रेख AB वर असेल तर
$x =$ ——— किंवा $x =$ ——— किंवा ——— $< x <$ ———

(ii) जर P हा किरण AB वर असेल तर $x >$ ——— किंवा $x =$ ———

(iii) जर P हा किरण BA वर असेल तर $x <$ ——— किंवा $x =$ ———

§ 2·12 विरुद्ध किरण :

बाजूला दिलेली आकृती पाहा. या आकृतीत किरण PQ व किरण PR दाखवले आहेत. अशा किरणांना आपण परस्परांचे विरुद्ध किरण (opposite rays) म्हणतो.



आ. 2·14

येथे, किरण PQ चा अंत्यबिंदू कोणता ?
किरण PR चा अंत्यबिंदू कोणता ?
या दोन किरणांचे समाईक बिंदू कोणते ?
P, Q, R पैकी कोणता बिंदू इतर दोघांच्या दरम्यान आहे ?

या प्रश्नांची उत्तरे शोधा. म्हणजे विरुद्ध किरणांची जी व्याख्या खाली दिली आहे, तिच्यात समाविष्ट केलेल्या मुद्द्यांचा पुरेसा खुलासा होईल.

व्याख्या : जर P बिंदू Q व R या बिंदूंच्या दरम्यान असेल, तर किरण PQ व किरण PR यांना परस्परांचे **विरुद्ध किरण** म्हणतात.

दिलेल्या रेषेवर कोणताही एक बिंदू घेतल्यास, तो अंत्यबिंदू असलेले, दोन किरण त्या रेषेत असतात व ते परस्परांचे विरुद्ध किरण असतात.

विरुद्ध किरण हे नेहमी एकाच रेषेवर असतात व त्यांच्या अंत्यबिंदूशिवाय त्यांच्यात कोणताही बिंदू समाईक नसतो.

§ 2·13 प्रश्न :

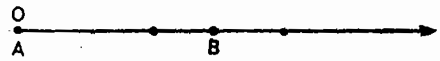
1. एकरेषीय नसणारे दोन किरण, विरुद्ध किरण असू शकतील काय ?
2. रिकाम्या जागी योग्य माहिती भरून, पुढील विधान पूर्ण करा.
   किरण PT हा किरण PS चा विरुद्ध किरण असल्यास ——— हा बिंदू ——— व ——— या बिंदूंच्या दरम्यान असतो.
3. एका निर्देशक पद्धतीत, $A = -3$, $P = -13$, $Q = 5$ असल्यास, मिळणाऱ्या विरुद्ध किरणांची नावे लिहा.
4. किरण AB च्या विरुद्ध किरणात असणारा प्रत्येक बिंदू हा किरण BA मध्ये असलाच पाहिजे काय ?
5. बाजूच्या तक्त्यात एक निर्देशक पद्धती दिली आहे. तीवरून पुढील विधाने खरी की खोटी ते सांगा.
   (i) किरण MN च्या विरुद्ध किरणात K बिंदू नाही.
   (ii) किरण NM मध्ये K बिंदू आहे.
   (iii) किरण QP च्या विरुद्ध किरणात R बिंदू समाविष्ट आहे.

बिंदू	निर्देशक
M	-2
N	8
K	$-7{\cdot}2$
P	$\frac{3}{5}$
R	6
Q	-4

§ 2·14 बिंदु-स्थापन :

दोन भिन्न बिंदू दिले असता, एकाचा निर्देशक 0 व दुसऱ्याचा निर्देशक धन राहील अशी निर्देशक पद्धती निवडता येते हे आपण एका गृहीतकात पाहिले आहे. (त्या गृहीतकाचे नाव सांगा.)

समजा, A व B हे दोन बिंदू दिले आहेत. त्यावरून बनणाऱ्या किरण AB ची कल्पना आपण करू शकतो.



आ. 2·15

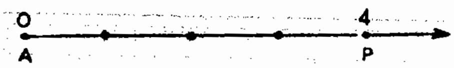
आता येथे, A चा निर्देशक 0 व B चा निर्देशक धन राहील अशी निर्देशक पद्धती आपण निवडली तर किरण AB च्या कोणत्याही बिंदूचा (अंत्यबिंदू A सोडून) निर्देशक धन राहील हे उघड आहे. तसेच दिलेली धन वास्तव संख्या ज्याचा निर्देशक होईल असा (रेषा AB वरील) प्रत्येक बिंदू, किरण AB मध्येच असेल हेही स्पष्ट आहे.

वरीलप्रमाणे, A चा निर्देशक 0 व B चा निर्देशक धन राहील अशी निर्देशक पद्धती निवडली असे समजा; तर 4, 5 व −3 या दिलेल्या संख्यांपैकी कोणत्या संख्यांचे आलेख, किरण AB वर असतील ?

या दिलेल्या संख्यांपैकी कोणत्या संख्येचा आलेख, किरण AB च्या विरुद्ध किरणावर असेल ?

वरील उदाहरणात निवडलेल्या निर्देशक पद्धतीत 4 चा आलेख बिंदू P आहे असे समजा; तर P चे A पासून अंतर किती ? मोजपट्टीगृहीतकातील अंतराच्या सूत्राने याचे उत्तर देता येते.

A = 0 व P = 4 असल्याने, $d(A, P) = |4-0|$
$= |4|$
$= 4$



आ. 2·16

म्हणजे हे अंतर, त्या दिलेल्या 4 ह्या **धन** संख्येएवढेच आहे.

याउलट, ज्याचे A पासून अंतर 4 आहे, असा P हा एकच बिंदू किरण AB वर आहे.

यावरून असे दिसते की, आपण निवडलेल्या निर्देशक पद्धतीनुसार, किरण AB च्या कोणत्याही R बिंदूचा निर्देशक व $d(A,R)$ दाखवणारी संख्या एकच असते.

या निर्देशक पद्धतीनुसार, किरण AB चा D हा एक बिंदू आहे. $d(A, D) = 6{\cdot}2$ असल्यास D बिंदूचा निर्देशक काय असेल ?

A = 0 आणि B = एक धन संख्या धरून, आपण निवडलेल्या निर्देशक पद्धतीबाबत केलेल्या वरील विवेचनातून निघणारा निष्कर्ष पुढील प्रमेयात मांडला आहे.

§ 2·15 बिंदुस्थापनाचे प्रमेय (Point Plotting Theorem)

किरण AB दिला असेल व x ही एक धन वास्तव संख्या दिली असेल तर $d(A, P) = x$ होईल असा P हा एक व एकच बिंदू किरण AB वर असतो.

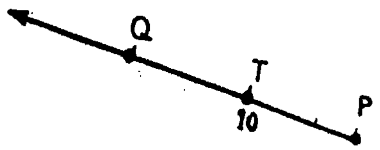
म्हणजेच,

दिलेल्या किरणाच्या अंत्यबिंदूपासून दिलेल्या धन वास्तव संख्येएवढ्या अंतरावर असणारा एक व एकच बिंदू त्या किरणावर असतो.

समजा, किरण PQ हा एक किरण दिला आहे.

आणि आपल्याला त्या किरणाच्या P ह्या अंत्यबिंदूपासून 10 अंतरावर असणारा त्या किरणाचा बिंदू हवा आहे. तर असा बिंदू मिळू शकतो व तो एकच एक असतो हाच या प्रमेयाचा अर्थ !

जर $d(P, Q) > 10$, तर हवा असलेला बिंदू T हा P व Q यांच्या दरम्यान राहील. (आ. 2·17)



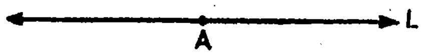
आ. 2·17



आ. 2·1

जर $d(P, Q) < 10$, तर हवा असलेला बिंदू T असा असेल की Q बिंदू, T व P यांच्या दरम्यान राहील. (आ. 2·18)

§ 2·16 दिलेल्या किरणावर, दिलेल्या अंतरानुसार बिंदूचे स्थापन कसे करता येते व त्यात एकमेवता कशी असते हे आपण पाहिले. आता बिंदूच्या स्थापनाचा रेषेच्या संदर्भात विचार करू.

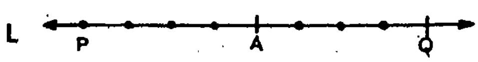


आ. 2·19

L ह्या एका रेषेवर A हा एक बिंदू आपण घेऊ. त्या A बिंदूपासून 10 अंतरावर असणारे L रेषेचे किती बिंदू असतील ?

आपण असे पाहिले आहे की, रेषेवरील कोणत्याही बिंदूमुळे, तो बिंदू अंत्यबिंदू असेल असे दोन किरण मिळतात.

बिंदुस्थापनाच्या प्रमेयानुसार, प्रत्येक किरणावर त्यांच्या अंत्यबिंदूपासून, दिलेल्या धन संख्येइतक्या अंतरावर असणारा एक आणि एकच बिंदू असतो. म्हणून दिलेल्या L रेषेच्या झालेल्या दोन किरणांपैकी प्रत्येक किरणावर असा एकेक बिंदू राहील. म्हणून L या रेषेवर तिच्यावरील दिलेल्या A या बिंदूपासून 10 अंतरावर दोन व दोनच बिंदू राहतील. बाजूच्या आकृतीत असे दोन बिंदू P व Q या नावांनी दाखवले आहेत.

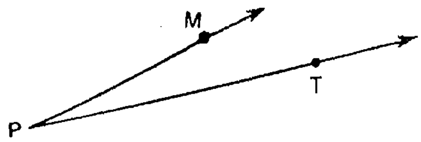


आ. 2·20

येथे अर्थातच, $d(A, P) = d(A, Q) = 10$.

§ 2·17 **प्रश्न :**

1. बाजूस दिलेली कोनाची आकृती पाहा. P बिंदूपासून, ज्यांचे अंतर 3 आहे असे किती बिंदू या कोनावर असतील ?



आ. 2·21

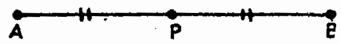
2. L रेषेवर B हा एक बिंदू आहे. x ही एक धन वास्तव संख्या आहे. B बिंदूपासून ज्यांचे अंतर x आहे असे L रेषेचे दोन बिंदू M व N हे आहेत. तर,
   (i) B, M, N पैकी कोणता बिंदू कोणत्या दोन बिंदूंच्या दरम्यान असेल ?
   (ii) $d(M,N)$ किती असेल ?

§ 2·18 **रेषाखंडाचा मध्यबिंदू** (Midpoint of a Segment) :

रेषाखंडाचा जो बिंदू, त्या रेषाखंडाच्या टोकांपासून समान अंतरावर असतो (समदूर असतो) त्या बिंदूला आपण त्या रेषाखंडाचा मध्यबिंदू म्हणतो.

दरम्यानतेच्या कल्पनेचा उपयोग करून, रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूची व्याख्या पुढीलप्रमाणे मांडता येते.

व्याख्या : जर P हा रेख AB चा असा बिंदू असेल की P हा A व B यांच्या दरम्यान असेल आणि $d(A,P) = d(B,P)$ असेल, तर त्या P बिंदूला रेख AB चा मध्यबिंदू म्हणतात.



आ. 2·22

वरील व्याख्येकडे अधिक काळजीपूर्वक पाहिले असता दिसून येते की, P हा रेख AB चा बिंदू आहे व $d(A, P) = d(B, P)$ असे म्हटल्यानंतर, P हा A व B यांच्या दरम्यान आहे, हे पुन्हा वेगळे सांगण्याची गरजच नाही. व्याख्या अधिक स्पष्ट असावी म्हणूनच आपण व्याख्येत तसा उल्लेख केला आहे.

§ 2·19 ▪ **प्रमेय : प्रत्येक रेषाखंडास नेमका एक मध्यबिंदू असतो.**

हे विधान आपण प्रमेय म्हणून मांडले आहे. ते इतके स्वाभाविक वाटते की, ते सिद्ध करण्याची आवश्यकताच काय आहे असा प्रश्न पडावा. परंतु पूर्वीची गृहीतके, प्रमेये इत्यादींनी हे प्रमेय सिद्ध करता [illegible] असून फारशी उपयुक्त ठरणार नसल्याने आपण ती गाळली आहे.

§ 2·20 **दुभागणे** (Bisection) :

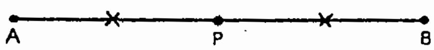
रेख AB चा P हा मध्यबिंदू असल्यास,

(1) P बिंदू, रेख AB ला **दुभागतो** असे म्हणतात.

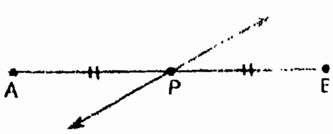
(2) P मधून जाणारी इतर कोणतीही रेषा, रेषाखंड किंवा किरण, रेख AB ला **दुभागते** असे म्हणतात.

(3) P मधून जाणारे व रेख AB समाविष्ट न करणारे कोणतेही प्रतल, रेख AB ला **दुभागते** असे म्हणतात.

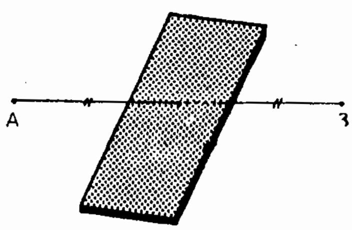
(4) रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूला त्या रेषाखंडाचा **दुभाजक** (Bisector) असे म्हणतात; तसेच मध्यबिंदूतून जाणाऱ्या व रेख AB समाविष्ट न करणाऱ्या रेषेला आणि प्रतलालाही त्या रेषाखंडाचे **दुभाजक** म्हणतात. संदर्भावरून, दुभाजक म्हणजे काय हे स्पष्ट होते.
दुभाजकाला, द्विभाजक असेही म्हणतात.



आ. 2·23 (दुभाजकबिंदू)

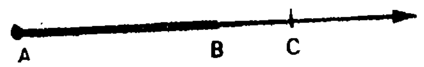


आ. 2·24 (दुभाजकरेषा)



आ. 2·25 (दुभाजकप्रतल)

§ 2·21 रेषाखंड वाढवणे :



आ. 2·26

समजा, रेख AB दिला आहे.

किरण A B वर, बिंदुस्थापनाच्या प्रमेयानुसार, रेख AC ची लांबी दिलेल्या धन संख्येएवढी असेल असा C बिंदू घेता येतो.

रेख AC ची ही लांबी, रेख AB च्या लांबीपेक्षा मोठी असली तर साहजिकच C हा बिंदू किरण AB वर, B च्या पलीकडे राहतो. (म्हणजे B हा A व C यांच्या दरम्यान राहतो.)

अशा वेळी, रेख AC हा, रेख AB ला B पलीकडे C पर्यंत वाढवून मिळालेला रेषाखंड आहे असे म्हणतात. याप्रमाणे रेख AB ला, B पलीकडे कितीही वाढवता येते. (पण याप्रमाणे वाढवून मिळालेला रेषाखंड आणि मूळचा रेख AB यात फरक आहे हे लक्षात असावे. किरण AB चा, B पलीकडील एकही बिंदू रेख AB मध्ये असत नाही.)



आ. 2·27

रेषाखंड AB ला, A पलीकडे सुद्धा कितीही वाढवता येते. बाजूची आकृती पाहा.

§ 2·22 ■ प्रमेय : दिलेला रेषाखंड AB, B पलीकडे वाढवून, हवी तेवढी लांबी असणारा रेषाखंड AC मिळवता येतो.

'रेख AB, A **पलीकडे** D **पर्यंत** असा वाढवला की, $d(A, D) = r$' या विधानाचा अर्थ पुढीलप्रमाणे होतो.

किरण AB च्या **विरुद्ध किरणावर** D बिंदू असा घेतला की, $d(A, D) = r$.

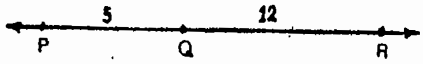
§ 2·23 प्रश्न :

1. केवलमूल्याचे चिन्ह न वापरता, पुढील संख्यांना सरळ रूप दया :
   (i) $|10|$ (ii) $|-12|$ (iii) $|-13+7|$ (iv) $|0-3|$
   (v) $|(-3)-(-1)|$ (vi) $|-4|-|-11|$

2. P आणि Q या बिंदूंचे निर्देशक अनुक्रमे p आणि q आहेत. तर पुढीलपैकी प्रत्येक वेळी $l(PQ)$ ठरवा.
   (i) $p = -2$ व $q = 10$; (ii) $p = 3\frac{1}{2}$ व $q = 7\frac{1}{2}$
   (iii) $p = -\frac{22}{3}$ व $q = -8$; (iv) $p = 7{\cdot}2$ व $q = p+2$.

3. एका रेषेच्या P या बिंदूचा निर्देशक -3 आहे. पुढील विधाने खरी होण्यास Q या त्याच रेषेवरील बिंदूच्या निर्देशकाच्या शक्य तेवढ्या सर्व किंमती लिहा.
   (i) $l(PQ) = 12$; (ii) $l(PQ) = 0$; (iii) $l(PQ) = 8$;
   (iv) $l(PQ) = 20$ आणि Q चा निर्देशक धन असावा.
   (v) $l(PQ) = 2$ आणि Q चा निर्देशक धन असावा.

4. P, Q, R हे एकरेषीय बिंदू असून,
$d(P, Q) = 5$ व $d(Q, R) = 12$ आहे.
तर $d(P, R) = 6$ असू शकेल काय?
$d(P, R)$ च्या संभाव्य अशा सर्व किंमतींचा संच लिहा.



आ. 2·28

5. L रेषेसाठी निवडलेल्या एका निर्देशक पद्धतीनुसार A, B व C या बिंदूंचे निर्देशक अनुक्रमे -3, -7 व 5 आहेत. त्याच L रेषेसाठी निवडलेल्या दुसऱ्या एका निर्देशक पद्धतीत A व B चे निर्देशक अनुक्रमे 2 व -6 आहेत. तर या दुसऱ्या निर्देशक पद्धतीत C बिंदूचा निर्देशक किती असेल?

6. A, B, C व D या एकरेषीय बिंदूंचे निर्देशक अनुक्रमे -5, -9, 3 व x आहेत.
जर (i) $x = -8$, (ii) $x = 0$, (iii) $x = \sqrt{13}$,
तर D बिंदू रेख AB व रेख AC यांपैकी कोणाचा घटक असेल?

7. एका निर्देशक पद्धतीत A, B, C बिंदूंचे निर्देशक अनुक्रमे -6, -5, आणि 13 आहेत; तर पुढीलपैकी कोणती विधाने खरी असतील.
   (i) C बिंदू, किरण AB चा घटक आहे.
   (ii) C बिंदू, किरण BA चा घटक आहे.
   (iii) B बिंदू, किरण CA चा घटक आहे.
   (iv) किरण AB व किरण AC हे समान आहेत.
   (v) किरण CB व किरण CA हे समान आहेत.
   (vi) किरण BA व किरण BC हे विरुद्ध किरण आहेत.

8. P, Q, R या एकरेषीय बिंदूंचे निर्देशक अनुक्रमे 0, 4 व 8 आहेत; तर पुढील प्रश्नांची उत्तरे द्या :
   (i) किरण PQ, किरण QR ला समाविष्ट करतो काय?
   (ii) किरण QR मध्ये, किरण PQ समाविष्ट आहे काय?
   (iii) किरण PR मध्ये, रेख PR समाविष्ट आहे काय?
   (iv) किरण QR मध्ये, रेख PR समाविष्ट आहे काय?

9. प्रश्न 8 मधील रेख QR च्या मध्यबिंदूचा निर्देशक लिहा.

10. A–B–C दिले असल्यास,
   (i) A हा B च्या डावीकडेच असला पाहिजे काय?
   (ii) B हा रेख AC चा मध्यबिंदूच असला पाहिजे काय?
   (iii) किरण BC हा, किरण BA चा विरुद्ध किरण असलाच पाहिजे काय?

§ 2·24 **बहिर्वक्र संच** (Convex Sets)

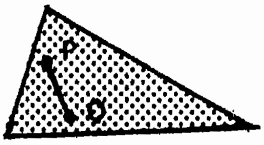
आठव्या इयत्तेत, तुम्ही बहिर्वक्र संच म्हणजे काय ते पाहिले आहे. बहिर्वक्र संच हा एक विशिष्ट गुणधर्म असलेला बिंदुसंच असतो.

ज्या संचातील कोणत्याही दोन बिंदूंना जोडणारा रेषाखंड पूर्णपणे त्या संचात समाविष्ट असतो, त्या बिंदुसंचाला बहिर्वक्र संच म्हणतात.

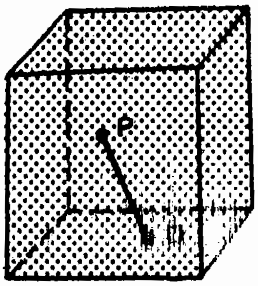
खालील आकृतीत, बहिर्वक्र असणारे काही संच छायांकित करून दाखवले आहेत.



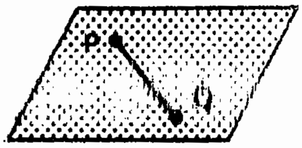
आ. 2·29



आ. 2·30



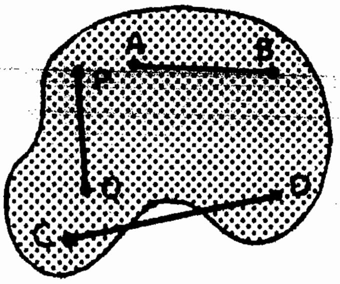
आ. 2·31



आ. 2·32

या प्रत्येक संचात, कोणतेही दोन बिंदू P व Q घेऊन त्यांना जोडणारा रेषाखंड PQ काढल्यास तो त्या संचात पूर्णपणे समाविष्ट असतो.

आता खाली दिलेली बिंदुसंचाची एक आकृती पाहा.

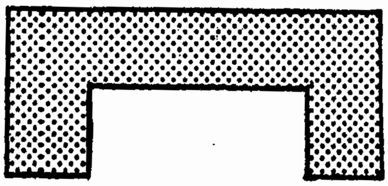


आ. 2·33

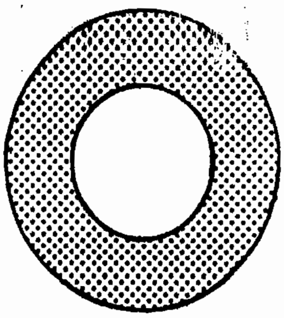
या संचाचे A व B हे दोन बिंदू असे आहेत की, रेखAB हा या संचात पूर्णपणे समाविष्ट आहे. रेखPQ देखील या संचात समाविष्ट आहे. पण एवढ्याने हा दिलेला संच बहिर्वक्र ठरत नाही. कारण त्या संचात असणारे C व D हे दोन बिंदू असे आहेत की रेखCD चे काही बिंदू या संचात समाविष्ट नाहीत.

एखादया बिंदुसंचात P व Q ह्या बिंदूंची अशी एक जरी जोडी असेल की रेखPQ चा एखादा तरी बिंदू त्या संचाबाहेर असेल, तर तो बिंदुसंच बहिर्वक्र नसतो.

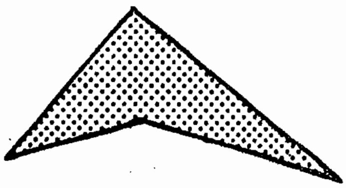
खालील आकृतींत, असेच बहिर्वक्र नसलेले काही संच दाखवले आहेत.



आ. 2·34



आ. 2·35



आ. 2·36

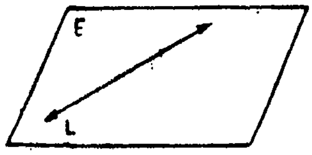
रेषा, प्रतल, अवकाश हे बहिर्वक्र संच आहेत.

त्रिकोण हा बहिर्वक्र संच नाही. (का ?)

कोन हा बहिर्वक्र संच नाही. (का ?)

§ 2·25 **प्रतलविभाजन** (Plane Separation) :

प्रतलातील एखादया रेषेमुळे त्या प्रतलाचे कसे विभाजन होते हे तुम्ही मागील इयत्तेत पाहिलेच आहे. समजा E हया प्रतलात L ही एक रेषा आहे.



आ. 2·37

बाजूच्या आकृतीवरून आपल्याला असे दिसते की, L रेषेचे बिंदू [illegible] या प्रतलाचे दोन भाग होतात.

या दोन भागांची वैशिष्ट्ये काय आहेत ?

(1) हे दोन भाग त्या रेषेच्या विरुद्ध अंगास आहेत.

(2) कोणत्याही एका भागातील दोन बिंदूंना जोडणारा रेषाखंड, त्या विभाजन रेषेला छेदत नाही. याचाच अर्थ तो रेषाखंड त्या भागात पूर्णपणे समाविष्ट असतो. म्हणजेच तो प्रत्येक भाग बहिर्वक्र संच असतो. याउलट, एका भागातील एक बिंदू व दुसऱ्या भागातील एक बिंदू यांना जोडणारा रेषाखंड विभाजन रेषेला छेदतोच. प्रतलविभाजनाचा हा गुणधर्म आपण आकृतीवरून पाहिला. तोच खालील गृहीतकात सांगितला आहे.

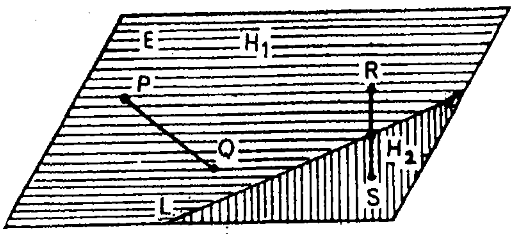
गृहीतक 8 : प्रतलविभाजनाचे गृहीतक (Plane Separation Postulate)

दिलेल्या प्रतलातील कोणत्याही रेषेमुळे, त्या रेषेवर नसलेल्या पण त्या प्रतलात असलेल्या बिंदूंचे असे दोन संच होतात की,

(1) प्रत्येक संच बहिर्वक्र असतो.

(2) एका संचातील कोणताही एक बिंदू आणि दुसऱ्या संचातील कोणताही एक बिंदू यांना जोडणारा रेषाखंड त्या रेषेस छेदतो.

समजा E हया प्रतलात L ही कोणतीही एक रेषा आहे. गृहीतक 8 मध्ये सांगितल्याप्रमाणे L रेषेमुळे H_1 आणि H_2 हे संच होतात.



आ. 2·38

H_1 आणि H_2 यांपैकी प्रत्येकास **(अर्धप्रतल)** Half-plane म्हणतात व L रेषेला त्या प्रत्येक अर्धप्रतलाची **कडा** (Edge) म्हणतात.

गृहीतक 8 मधील (1) वरून H_1 व H_2 हे संच बहिर्वक्र आहेत. म्हणून कोणत्याही एका अर्धप्रतलातील दोन बिंदू जोडणारा रेषाखंड पूर्णपणे त्या अर्धप्रतलात असतो. आता L रेषा आणि हे अर्धप्रतल, विभिन्न संच (disjoint sets) असल्यामुळे कोणत्याही दोन संचांत एकही समाईक बिंदू नसतो. म्हणून त्या अर्धप्रतलातील कोणताही रेषाखंड L रेषेला छेदत नाही. परंतु H_1 मधील एक बिंदू व H_2 मधील एक बिंदू यांना जोडणारा रेषाखंड मात्र L रेषेला छेदतोच.

जर दोन बिंदू अशा एकाच अर्धप्रतलात असतील तर ते बिंदू त्या **विभाजन रेषेच्या एकाच अंगास (किंवा बाजूस)** आहेत असे म्हणतात. ते दोन बिंदू जर भिन्न अर्धप्रतलात असतील तर ते त्या **रेषेच्या विरुद्ध अंगास (किंवा बाजूंस)** आहेत असे म्हणतात.

उदाहरणार्थ, वर दिलेल्या आकृतीत, (आ. 2·38) P व Q हे L रेषेच्या एकाच बाजूस आहेत. R व S हे मात्र L रेषेच्या विरुद्ध बाजूस आहेत.

कोणत्याही रेषेच्या विरुद्ध बाजूंस असलेल्या दोन बिंदूंना जोडणारा रेषाखंड त्या रेषेला छेदतोच.

समजा रेषा AB ने तयार झालेल्या H_1 ह्या अर्धप्रतलात P हा बिंदू आहे, अशा वेळी H_1 ह्या अर्धप्रतलाला, **रेषा AB ची 'P–बाजू'** असे म्हणतात.

§ 2·26 अवकाशविभाजन :

प्रतलातील एखाद्या रेषेमुळे जसे प्रतलाचे दोन भाग होतात, तसेच अवकाशातील एखाद्या प्रतलामुळे अवकाशाचे दोन भाग होतात. ह्यासंबंधीचे गृहीतक खाली दिले आहे. त्याची भाषा तंतोतंत प्रतल-विभाजनाच्या गृहीतकासारखी आहे हे तुमच्या सहजच लक्षात येईल.

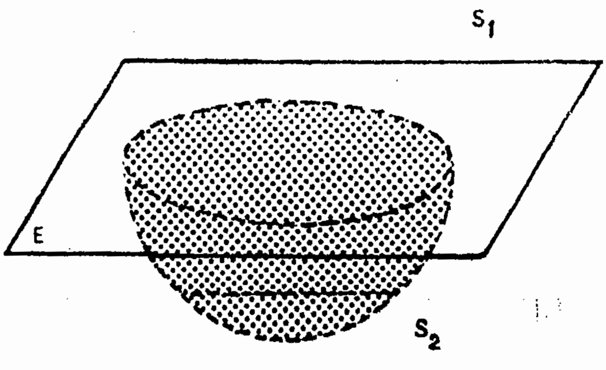
गृहीतक 9 : अवकाशविभाजनाचे गृहीतक (Space Separation Postulate)

कोणत्याही प्रतलामुळे, त्या प्रतलात समाविष्ट नसणाऱ्या बिंदूंचे असे दोन संच तयार होतात की,

(1) प्रत्येक संच बहिर्वक्र असतो,

(2) एका संचातील कोणताही एक बिंदू आणि दुसऱ्या संचातील कोणताही एक बिंदू यांना जोडणारा रेषाखंड, त्या प्रतलास छेदतो.

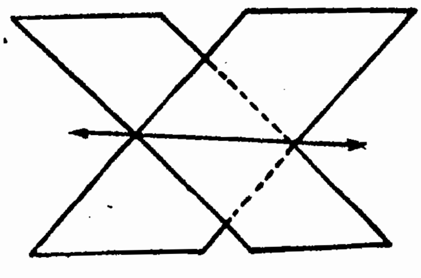
या गृहीतकात सांगितलेल्या त्या दोन संचांना अर्धअवकाश (halfspaces) म्हणतात व त्या विभाजक प्रतलास त्या प्रत्येक अर्धअवकाशाचा पृष्ठ (face) म्हणतात.



2·39

(कागदावर अर्धअवकाश [illegible] काढणे अवघड असते.)

E प्रतलाची वरची बाजू म्हणजे, E ने केलेल्या दोन अर्धअवकाशांपैकी S_1 अर्धअवकाश. बाजूला दिलेल्या आकृतीत E प्रतलाची खालची बाजू म्हणजे S_2 अर्धअवकाश होय.



आ. 2·40

कोणतेही एक प्रतल, फक्त दोन अर्धअवकाशांचे पृष्ठ असते.

दिलेली रेषा ही कडा असलेली असंख्य अर्धप्रतले अवकाशात असतात. त्या रेषेला, त्या सर्व अर्धप्रतलांची **समाईक कडा** (Common Edge) म्हणतात.

आपण काय शिकलो ?

(1) **संज्ञा—व्याख्या :**

दरम्यान असणे, रेषाखंड, अंत्यबिंदू, किरण, विरुद्ध किरण, रेषाखंडाचा मध्यबिंदू, दुभाजक रेषा व रेषाखंड, बहिर्वक्र संच, अर्धप्रतल, अर्धअवकाश.

(2) **कल्पना :**

दरम्यानता आणि अंतर, दरम्यानता आणि वास्तव संख्या, क्रमसंबंध, रेषाखंडाची लांबी, एकरूप रेषाखंड, लहान-मोठे रेषाखंड, रेषाखंड वाढवणे; प्रतलविभाजन.

(3) **गृहीतके :**

(i) प्रतलविभाजन (ii) अवकाशविभाजन.

(4) **प्रमेये :**

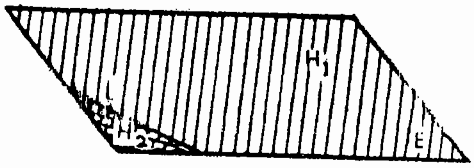
(i) बिंदूस्थापन (ii) रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूचे एकमेवत्व.

प्रश्नसंग्रह

1. बहिर्वक्र संचाबाबतचे पुढील विधान पूर्ण करा :
   दिलेल्या संचात जर———बिंदू असे असतील की त्यांना———रेषाखंडाचा——— बिंदू त्या संचात असमाविष्ट असेल तर तो संच बहिर्वक्र———.
2. पुढे काही विधाने दिली आहेत. त्यांपैकी कोणते विधान खरे आहे व कोणते खोटे आहे ते ठरवा तुमच्या निर्णयाचे समर्थन करा.
   - (i) प्रत्येक रेषा म्हणजे बहिर्वक्र संच असतो.
   - (ii) रेषाखंड हा बहिर्वक्र संच असतो.
   - (iii) किरण हा बहिर्वक्र संच नसतो.
   - (iv) रेषेचा कोणताही उपसंच (subset) हा बहिर्वक्र संच असतोच.
   - (v) बहिर्वक्र संचाचा प्रत्येक उपसंच बहिर्वक्र संच असतो असे नाही.
   - (vi) दोन बहिर्वक्र संचांचा संयोग, बहिर्वक्र असतोच असे नाही.
   - (vii) दोन बहिर्वक्र संचांचा छेदसंच बहिर्वक्र असतो.
3. एका विशिष्ट परिस्थितीत, दोन किरणांचा संयोग हा बहिर्वक्र संच असतो. ही परिस्थिती केव्हा येईल ?
4. प्रतलातून, त्याचा कोणताही उपसंच वगळून राहिलेल्या भागास, 'अवशिष्ट प्रतल' म्हणू. असे अवशिष्ट प्रतल, बहिर्वक्र संच ठरेल काय ?
5. रेषेचे, त्यातील कोणत्याही बिंदूने विभाजन होते असे म्हणता येते; याची कारणे द्या.
6. प्रतलविभाजनाच्या गृहीतकावरून खालील विधाने पूर्ण करा.
   - (i) प्रतलातील दिलेल्या रेषेने तयार झालेली दोन अर्धप्रतले———संच असतात.
   - (ii) त्या अर्धप्रतलांपैकी कोणत्याही एकातील दोन बिंदू जोडणारा रेषाखंड विभाजनरेषेस———.
   - (iii) विरुद्ध अर्धप्रतलातील दोन बिंदू जोडणारा रेषाखंड विभाजनरेषेस———.
7. प्रतल बहिर्वक्र असतो असे कोणत्या आधारे म्हणता येईल ?

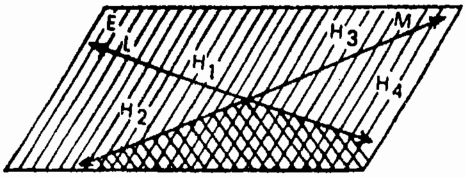
8. **E प्रतलाची, त्यातील L रेषेने झालेली H_1 व H_2 ही दोन अर्धप्रतले आकृतीत दाखवली आहेत.**

यांपैकी लहान अर्धप्रतल कोणते? मोठे कोणते?



आ. 2·41

9. बाजूच्या आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे E प्रतलात L व M ह्या दोन रेषा आहेत. L रेषेने केलेली अर्धप्रतले H_1 व H_2 आहेत. आणि M रेषेने केलेली अर्धप्रतले H_3 व H_4 आहेत.



आ. 2·42

(i) यांपैकी सर्वात मोठे अर्धप्रतल कोणाला म्हणता येईल?

(ii) अर्धप्रतलाचा लहानमोठेपणा ठरवणारी एखादी कसोटी असल्यास सांगा.

10. E प्रतलात L आणि M अशा दोन छेदक रेषा दिल्या आहेत त्यामुळे त्या प्रतलाचे चार भाग पडतात. त्या रेषांचे बिंदू यांपैकी कोणत्याही भागात नाहीत. हे भाग बहिर्वक्र संच आहेत काय?

आ. 2·41 मधील H_2 हे अर्धप्रतल H_1 या अर्धप्रतलापेक्षा लहान आहे असे वाटते. परंतु हा आपल्या आकृती काढण्याच्या मर्यादांमुळे उद्भवलेला दोष आहे हे लक्षात घ्यावे. 'लहान', 'मोठे' इत्यादी शब्दप्रयोग अर्धप्रतलांच्या बाबतीत चुकीचे आहेत.

पारिभाषिक शब्द

अर्धप्रतल -- Halfplane	दुभाजक -- Bisector
अवकाश – Space	प्रतलविभाजन – Plane separation
अंत्यबिंदू, टोक – End point	पृष्ठ – Face
एकरूप – Congruent	बहिर्वक्र – Convex
एकरूपता – Congruence	बिंदूस्थापन – Point Plotting
कडा – Edge	मध्यबिंदू – Midpoint
किरण – Ray	रेषाखंड – Segment
क्रमसंबंध – Order Relation	विभिन्न संच – Disjoint Sets
दरम्यानता – Betweenness	विरुद्ध किरण – Opposite Ray
दुभागणे – Bisection	समाईक – Common

प्रकरण 3

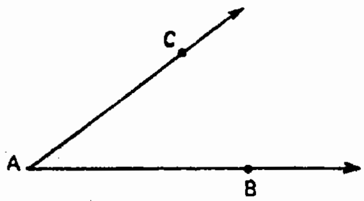
कोन व त्रिकोण

§ 3.1 मागील प्रकरणात तुम्ही कोन व त्रिकोण म्हणजे काय हे शिकलात. आता आपण त्या कल्पनांची उजळणी करून त्यासंबंधीचे काही गुणधर्म या प्रकरणात पाहू.

व्याख्या : कोन (Angle) : एकच अंत्यबिंदू असलेल्या परंतु एका रेषेत नसलेल्या दोन किरणांच्या संयोगसंचाला **कोन** म्हणतात.

त्या किरणांना त्या कोनाच्या **भुजा** (Sides) म्हणतात व

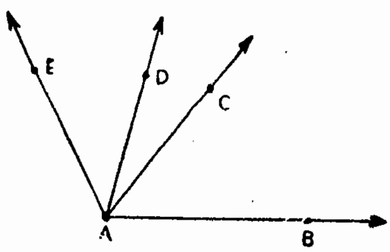
त्यांच्या समाईक अंत्यबिंदूला त्या कोनाचा **शिरोबिंदू** (Vertex) म्हणतात.



आ. 3·1

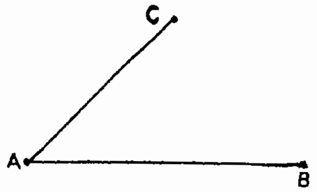
आ. 3·1 मध्ये किरणAB व किरण AC यांच्या संयोगाने तयार झालेला कोन दाखवला आहे. हा कोन ∠BAC किंवा ∠CAB असा लिहितात. किरणAB व किरणAC, कोनाच्या भुजा असून A बिंदू हा त्या कोनाचा शिरोबिंदू आहे. कोन लिहिण्याच्या या पद्धतीत, शिरोबिंदू दाखवणारे A हे अक्षर B व C त्या दोन अक्षरांच्या मध्ये असते.

एखादया विवेचनात A हा शिरोबिंदू असलेला एकच कोन असेल तर तो कोन फक्त ∠A असाही लिहिता येतो. आ. 3·2 मध्ये A हा समाईक शिरोबिंदू असलेले काही कोन दाखवले आहेत. अशा वेळी ∠A या [illegible] आहे हे स्पष्ट होत नाही. म्हणून हया ठिकाणी ∠ABC किंवा ∠DAC अशा भुजा स्पष्टपणे दाखवणाऱ्या चिन्हांचाच वापर केला पाहिजे. ∠BAC या चिन्हाने किरणAB व किरणAC या भुजा असलेला कोन निश्चित होतो.



3·2

वरील व्याख्येवरून हे दिसून येईल की ∠BAC हा एक बिंदूसंच आहे. या संचाचे घटक म्हणजे किरणAB व किरणAC यांवरील बिंदू होत.



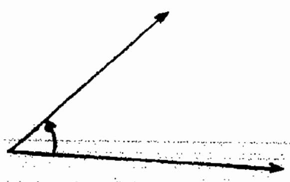
आ. 3·3

आता आ. 3·3 पाहा. रेखAB व रेखAC यांच्या संयोगाला कोन म्हणता येईल का? या रेषाखंडांनी $\angle BAC$ निश्चित होतो. पण यांच्या संयोग संचाला कोन म्हणता येणार नाही. कारण कोनाच्या भुजा या रेषाखंड असू शकत नाहीत, तर त्या किरण असाव्या लागतात.

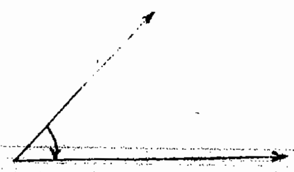
टीप : कोणताही कोन हा एका प्रतलात समाविष्ट असतो. (का?)

कोनाच्या व्याख्येनुसार कोन हा दोन विशिष्ट किरणांच्या संयोगाने तयार झालेला एक बिंदूसंच असतो. प्रस्तुत पुस्तकात आपण कोन याच अर्थाने घेणार आहोत. परंतु पुढे जेव्हा आपण त्रिकोणमिती शिकू, त्यावेळी कोनाचा विचार काहीशा वेगळ्या पद्धतीने करावा लागेल.

उदाहरणार्थ, एखादा किरण त्याच्या अंत्यबिंदूभोवती, खालील आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे, फिरवून कोन मिळतो अशी कल्पना करता येईल. किरणाचे भ्रमण घड्याळाच्या काट्यांच्या दिशेने असेल तर त्या कोनाला ऋण कोन म्हणतात व विरुद्ध दिशेने असेल तर त्याला धन कोन म्हणतात. या पद्धतीने वरील आकृतींतील दोन कोन भिन्न होतील, कारण त्यांपैकी एक कोन धन असून दुसरा कोन ऋण आहे.

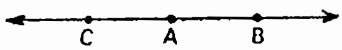


आ. 3·4



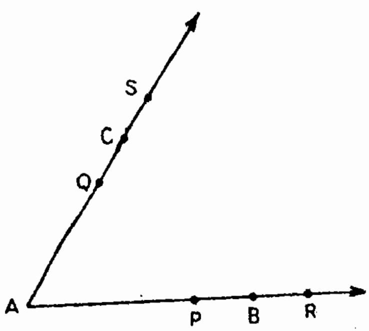
आ. 3·5

कोनाच्या आपल्या व्याख्येनुसार, कोन तयार होण्यासाठी एका रेषेत नसलेले दोन किरण असावे लागतात. पण पुढे एका रेषेत असलेल्या दोन किरणांनी देखील कोन तयार होतो असे आपण म्हणणार आहोत. असा 'कोन' आ. 3·6 मध्ये दाखवला असून त्याला सरळ कोन म्हणतात.



आ. 3·6

आपल्या अभ्यासात कोनासंबंधीच्या या वेगळ्या कल्पनांची आवश्यकता नसल्यामुळे आपण त्यांचा विचार करणार नाही.



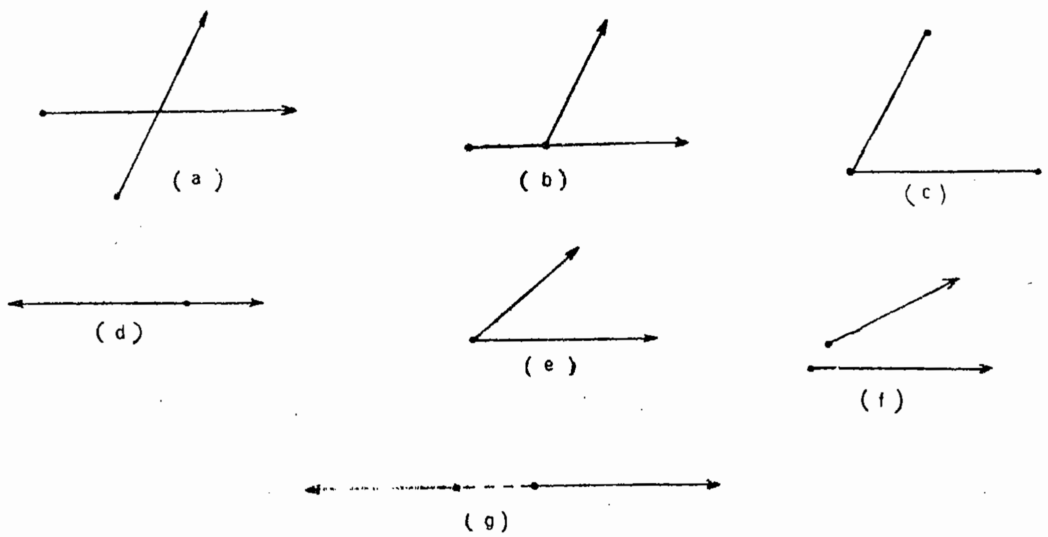
आ. 3·7

आ. 3·7 मधील $\angle BAC$ च्या भुजा AB वर P व R हे कोणतेही दोन बिंदू असून भुजाAC वर Q व S हे कोणतेही दोन बिंदू आहेत. आता किरणAB म्हणजेच किरणAP किंवा किरणAR आहे. तसेच किरणAC म्हणजेच किरणAQ किंवा किरणAS होय. त्यामुळे $\angle BAC$ हा $\angle PAC$, $\angle BAQ$, $\angle SAP$ अशा अनेक प्रकारांनी दाखवता येतो.

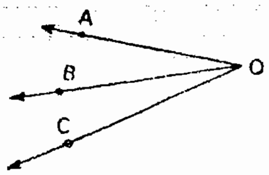
संचांच्या भाषेत, $\angle BAC = \angle PAC = \angle BAQ = \angle SAP$

§ 3·2 प्रश्न :

1. रिकाम्या जागी योग्य शब्द ठेवून कोनाची व्याख्या पूर्ण करा.
   एकच ········ असलेल्या व एका ········ नसलेल्या किरणांच्या ········ कोन म्हणतात.
2. खालीलपैकी कोणती आकृती कोनाची आहे ते सांगा.
   इतर आकृती कोनांच्या आकृती का नाहीत ते सांगा.



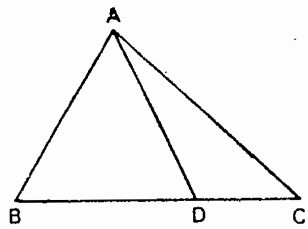
आ. 3·8



आ. 3·9

3. आ. 3·9 मध्ये दाखवलेल्या किरणांची नावे लिहा.
   या किरणांनी तयार होणाऱ्या तीन कोनांची नावे लिहा.
   या कोनांचा शिरोबिंदू कोणता ?
   ∠ O म्हणजे नेमका कोणता कोन हे का सांगता येत नाही ?

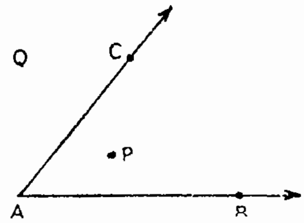
4. आ. 3·10 मध्ये एकूण सात कोन निश्चित होतात हे पडताळून पाहा व त्यांची नावे लिहा.



आ. 3·10

§ 3·3 कोनाचा अंतर्भाग (Interior of an Angle) :

आ. 3·11 मध्ये ∠ BAC दिला असून त्या कोनाच्या प्रतलात P व Q हे दोन बिंदू घेतले आहेत. आकृतीवरून असे दिसते की, P हा ∠ BAC च्या अंतर्भागात असून Q हा त्या कोनाच्या बहिर्भागात आहे. यावरून कोनाचा अंतर्भाग व बहिर्भाग म्हणजे काय याची साधारण कल्पना तुम्हांला आलीच असेल. हेच पुढील व्याख्येत सांगितले आहे.



आ. 3·11

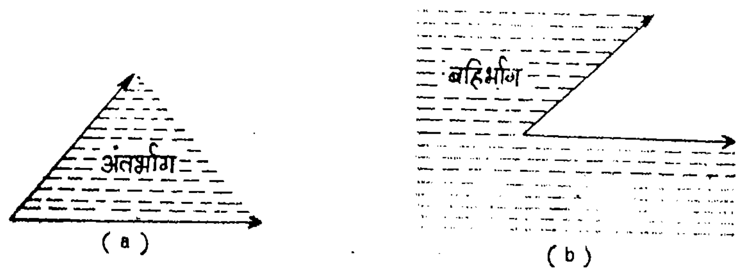
व्याख्या : समजा ∠ BAC हा एक दिलेला कोन आहे. P हा त्या कोनाच्या प्रतलातील कोणताही एक बिंदू आहे. जर,

(1) P व C बिंदू हे रेषाAB च्या एकाच बाजूस असतील व (2) P व B हे बिंदू, रेषाAC च्या एकाच बाजूस असतील तर,

P बिंदूला ∠BAC चा **अंतर्बिंदू** (Interior Point) म्हणतात.

कोनाच्या सर्व अंतर्बिंदूंच्या संचाला कोनाचा **अंतर्भाग** म्हणतात.

तसेच, कोनाच्या **अंतर्भागात** नसलेल्या व कोनाच्या भुजांवर नसलेल्या (कोनाच्या प्रतलातील) सर्व बिंदूंना कोनाचा **बहिर्भाग** (Exterior) म्हणतात.

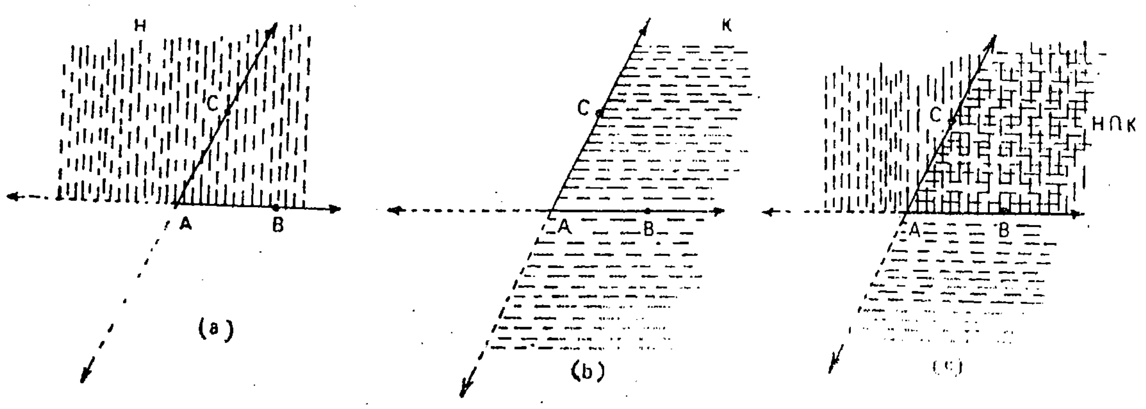


आ. 3·12

वरील आकृती (a) मध्ये कोनाचा **अंतर्भाग** दाखवला असून आकृती (b) मध्ये कोनाचा **बहिर्भाग** दाखवला आहे.

कोनाचा **अंतर्भाग** खालीलप्रमाणेही दाखवता येईल. रेषाAB मुळे ∠BAC च्या प्रतलाचे दोन अर्धप्रतलांत विभाजन होते. ज्या अर्धप्रतलात C बिंदू आहे; त्याला H नाव द्या. तसेच रेषाAC मुळे तयार झालेल्या दोन अर्धप्रतलांपैकी ज्यात B बिंदू आहे, त्याला K नाव द्या. H व K या अर्धप्रतलांचा छेद म्हणजेच ∠BAC चा **अंतर्भाग** होय. (आ. 3·13)

संचांच्या भाषेत, ∠BAC चा **अंतर्भाग** = H ∩ K.



आ. 3·13

कारण वरील व्याख्येतील अट (1) पूर्ण करणाऱ्या P बिंदूंनी H हे अर्धप्रतल मिळते (आ. 3·13 (a) पाहा) व अट (2) पूर्ण करणाऱ्या बिंदूंनी K हे अर्धप्रतल मिळते. (आ. 3·13 (b) पाहा). दोन्ही अटी पूर्ण करणाऱ्या बिंदूंनी H व K यांचा छेदसंच तयार होईल (आ. 3·13 (c) पाहा) व हाच कोनाचा **अंतर्भाग** होय.

आता अर्धप्रतल H म्हणजेच रेषाAB ची C–बाजू असून अर्धप्रतल K म्हणजेच रेषाAC ची B–बाजू होय. यावरून कोनाचा अंतर्भाग हा आणखी वेगळ्या शब्दांत खालीलप्रमाणे मांडता येईल.

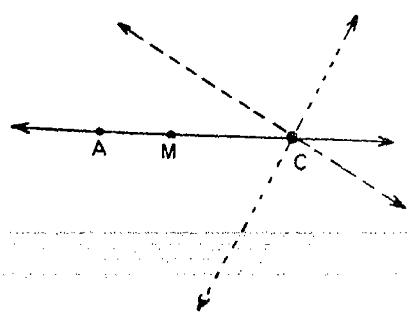
रेषाAB ची C–बाजू व रेषाAC ची B–बाजू यांचा छेद म्हणजे ∠BAC चा अंतर्भाग होय.

येथे हे लक्षात ठेवले पाहिजे की कोनाच्या भुजांवरील बिंदू हे कोनाच्या **अंतर्भागात** नसतात; तसेच ते कोनाच्या **बहिर्भागातही** नसतात. कोनाचा अंतर्भाग व कोनाचा बहिर्भाग हे दोन्ही संच कोनापासून, तसेच परस्परांपासून, विभिन्न असतात. कोनाच्या प्रतलातील कोणताही बिंदू हा त्या कोनाच्या **भुजा**, त्याचा **अंतर्भाग** किंवा त्याचा **बहिर्भाग** यांपैकी कोणत्यातरी एकाच संचात असतो.

कोनाचा अंतर्भाग हा एक बहिर्वक्र संच असतो. कारण कोनाचा अंतर्भाग हा दोन विशिष्ट अर्धप्रतलांचा छेद असतो. ही अर्धप्रतले बहिर्वक्र संच असल्यामुळे त्यांचा छेदही बहिर्वक्र संच होईल.

§ 3·4 कोनाचा अंतर्भाग व दरम्यानता :

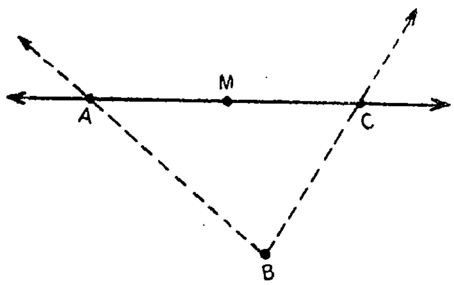
आ. 3·14 मध्ये A, M व C हे तीन एकरेषीय बिंदू असून M हा A व C यांच्या दरम्यान आहे. आता A व M हे बिंदू C मधून जाणाऱ्या रेषाAC खेरीज कोणत्याही रेषेच्या एकाच बाजूस असतात. हे आकृतीवरून सहज लक्षात येते. तीन एकरेषीय बिंदूंचा हा गुणधर्म, प्रतलविभाजनाचे गृहीतक (गृहीतक 8) व रेषा छेदनाचे प्रमेय (1·11) यांवरून सिद्ध करता येतो व तो सिद्ध करणे आवश्यकही आहे. परंतु त्याची सिद्धता किचकट आहे. म्हणून ती या ठिकाणी गाळली आहे. परंतु गुणधर्म फार उपयुक्त असल्यामुळे आपण तो खालील प्रमेयाच्या स्वरूपात मांडू.



आ. 3·14

§ 3·5 ▪ प्रमेय : A, M व C हे तीन एकरेषीय बिंदू आहेत; जर M हा A व C या बिंदूंच्या दरम्यान असेल तर A व M हे बिंदू, C मधून जाणाऱ्या (रेषा AC खेरीज) कोणत्याही रेषेच्या एकाच बाजूस असतात.

§ 3·6 आता आ. 3·15 पाहा. A, M व C हे बिंदू असून M हा A व C या बिंदूंच्या दरम्यान आहे. B हा रेषाAC वर नसलेला कोणताही एक बिंदू आहे. तर M बिंदू, ∠ABC च्या अंतर्भागात असतो हे आकृतीवरून आपल्या सहज लक्षात येते. B हा बिंदू, रेषाAC च्या बाहेर कोणत्याही ठिकाणी घेतला तरी M बिंदू, ∠ABC च्या अंतर्भागातच असतो. हा गुणधर्म वरील प्रमेय 3·5 वरून सहज सिद्ध करता येतो. कारण, वरील प्रमेयानुसार A व M हे बिंदू C मधून जाणाऱ्या रेषाBC च्या एकाच बाजूस आहेत. त्याचप्रमाणे, C व M हे बिंदू A मधून जाणाऱ्या रेषाBA च्या एकाच बाजूस आहेत. म्हणजेच M हा बिंदू, रेषाBC च्या A–बाजूस आहे, तसाच तो रेषाBA च्या C–बाजूस आहे. यावरून तो ∠ABC च्या अंतर्भागात आहे हे सिद्ध होते. हा निष्कर्ष पुढील पृष्ठावरील प्रमेयात मांडला आहे.



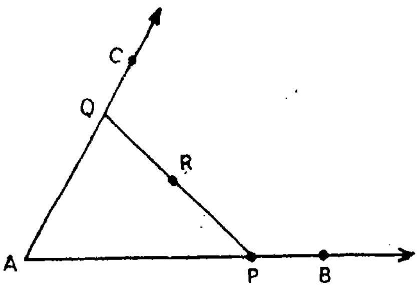
आ. 3·15

§ 3·7 ▪ दरम्यानता व कोनाच्या अंतर्भागाचे प्रमेय :

A, M व C हे तीन एकरेषीय बिंदू आहेत असे समजा. जर M हा बिंदू A व C यांच्या दरम्यान असेल व B हा रेषाAC वर नसलेला कोणताही बिंदू असेल तर M बिंदू ∠ABC च्या अंतर्भागात असतो.

§ 3·8 आता अंतर्भागासंबंधी आणखी एक उपयुक्त गुणधर्म पाहू.

∠BAC हा दिलेला कोन असून त्याच्या भुजा AB व भुजा AC यांवर अनुक्रमे P व Q हे (A खेरीज) कोणतेही बिंदू आहेत असे समजा. आता रेख PQ वरील, P व Q खेरीज R हा कोणताही बिंदू, ∠BAC च्या अंतर्भागात असतो हे आकृतीवरून दिसून येते. प्रमेय 3·7 वरून हा गुणधर्म सहज सिद्ध करता येतो. कारण, रेख PQ चा P व Q खेरीज कोणताही बिंदू P व Q यांच्या दरम्यान असतो. यावरून प्रमेय 3·7 चा उपयोग करून हा निष्कर्ष लगेच काढता येतो. हाच गुणधर्म खालील प्रमेयांत सांगितला आहे.



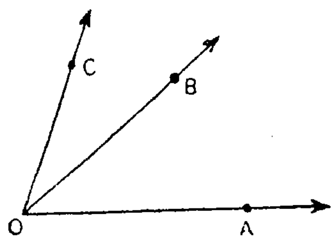
आ. 3·16

§ 3·9 ▪ कोनाच्या अंतर्भागाचे प्रमेय :

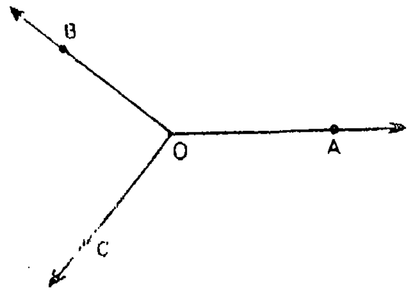
जर ∠BAC च्या भुजांवर, P व Q हे कोनाच्या शिरोबिंदूखेरीज कोणतेही दोन बिंदू असतील, तर रेख PQ चा P व Q खेरीज प्रत्येक बिंदू ∠BAC च्या अंतर्भागात असतो.

§ 3·10 **संलग्न कोन** (Adjacent Angles) :

खालील आकृतींत दाखवलेले कोन पाहा. यांतील कोणत्या कोनांना संलग्न कोन किंवा लगतचे कोन म्हणतात ? या कोनांची व्याख्या तुम्ही कशी कराल ?



आ. 3·17



आ. 3·18

व्याख्या : ज्या दोन एकप्रतलीय कोनांमध्ये समाईक शिरोबिंदू व एक समाईक भुजा असते आणि ज्यांचे अंतर्भाग परस्परांपासून विभिन्न असतात, अशा दोन कोनांना **संलग्न कोन** किंवा **लगतचे कोन** म्हणतात.

आ. 3·17 मधील ∠AOB व ∠BOC हे संलग्न कोन आहेत. पण त्याच आकृतीतील ∠AOB व ∠AOC हे संलग्न कोन नाहीत. (का ?)

संलग्न कोनांच्या असमाईक भुजा त्यांची समाईक भुजा समाविष्ट करणाऱ्या रेषेच्या विरुद्ध बाजूस असतात हे वरील आकृतीवरून दिसून येते.

§ 3·11 प्रश्न :

1. रिकाम्या जागी योग्य शब्द भरून खालील विधाने पूर्ण करा.

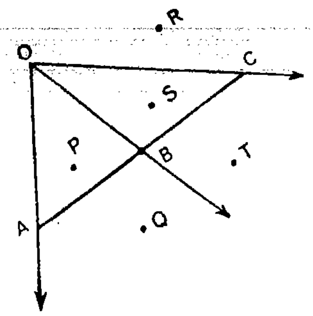
(a) कोनाच्या प्रतलातील जे बिंदू कोनाच्या·····मसतात व कोनाच्या·········नसतात, अशा सर्व बिंदूंच्या संचाला कोनाचा बहिर्भाग म्हणतात.

(b) ∠BAC च्या प्रतलात, जर P व B हे बिंदू रेषा·········च्या एकाच बाजूस असतील आणि P व C हे बिंदू रेषा·········च्या एकाच बाजूस असतील, तर P बिंदू ∠BAC च्या अंतर्भागात असतो.

(c) जर A, M व C हे एकरेषीय बिंदू असून·····हा बिंदू,·····व,·····यांच्या दरम्यान असेल, B हा रेषा AC वर नसलेला कोणताही बिंदू असेल, तर M हा ∠·········च्या अंतर्भागात असतो.

(d) ज्या दोन कोनांना समाईक···········असतो व एक समाईक···········असते आणि ज्यांचे···············अशा कोनांना संलग्न कोन म्हणतात.

2. आ. 3·19 मध्ये दाखवलेले कोणते बिंदू ∠AOC च्या अंतर्भागात आहेत व कोणते बिंदू ∠BOC च्या बहिर्भागात आहेत ?



आ. 3·19

3. बाजूच्या आकृतीवरून खालील विधाने पूर्ण करा.

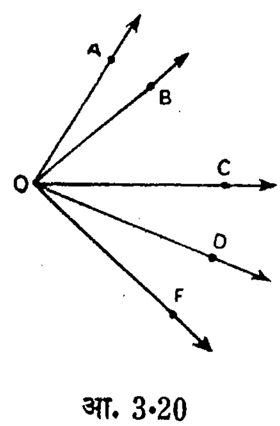
(a) B व C बिंदू ∠·········च्या व ∠·········च्या अंतर्भागात आहेत.

(b) D बिंदू ∠·········च्या व ∠·········च्या बहिर्भागात आहे.

(c) F बिंदू ∠AOD च्या·········त आहे.

(d) ∠AOD व ∠·········संलग्न कोन आहेत.

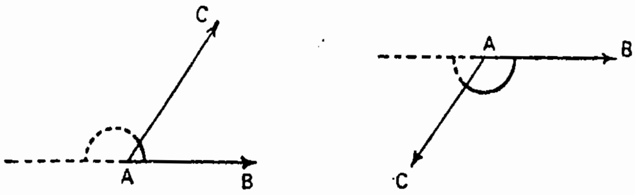
(e) ∠BOD शी ∠·········व ∠·········संलग्न आहेत.



आ. 3·20

§ 3·12 **कोनमापन** (Angle Measurement) :

कोन हे कोनमापकाने अंशामध्ये मोजतात हे तुम्हांला माहीतच आहे. अंश हे कोनमापनाचे माप (परिमाण) आहे. कोनमापकावर 0 ते 180 अंशांच्या खुणा असतात. कोनमापकाने मोजलेल्या कोनात जितके अंश असतील त्या संख्येला आपण त्या कोनाचे माप (measure) म्हणतो व ते $m \angle BAC$



(a) (b)

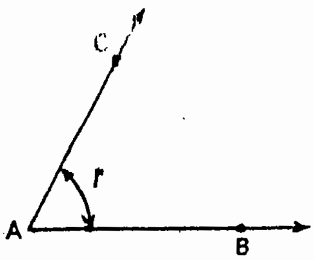
आ. 3·21

या चिन्हाने दाखवतो. आ. 3·21 (a) मध्ये $m \angle BAC = 40$ आहे. याचा अर्थ असा होतो की $\angle BAC$ चे माप 40 आहे किंवा $\angle BAC$ हा 40 अंशांचा कोन आहे. या ठिकाणी कोनाचे माप अंशांत असते हे आपण गृहीतच धरतो. त्यामुळे 40° असे अंश दाखवणारे चिन्ह लिहीत नाहीत. कोणत्याही कोनाचे माप 0 व 180 यांच्या दरम्यान असते हेही आपल्याला दिसून येते.

कोनमापनासंबंधीच्या या विवेचनाचा सारांश खालील गृहीतकात सांगितला आहे.

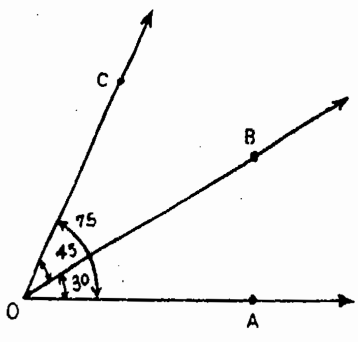
गृहीतक 10 : कोनमापनाचे गृहीतक (Angle Measurement Postulate) **प्रत्येक कोनाशी, शून्यापेक्षा मोठी व 180 पेक्षा लहान अशी एक आणि एकच वास्तव संख्या निगडित असते.**

या वास्तव संख्येस त्या कोनाचे **माप** (measure) म्हणतात. जर दिलेल्या $\angle BAC$ या कोनाशी; वरील गृहीतकानुसार, r ही वास्तव संख्या निगडित असेल तर r हे $\angle BAC$ चे माप होते. म्हणजेच $m \angle BAC = r$.



आ. 3·22

§ 3·13 **कोनांची बेरीज :**



आ. 3·23

आ. 3·23 मध्ये $\angle AOC$ हा दिलेला कोन असून त्यांच्या अंतर्भागात B हा एक बिंदू आहे. आता समजा, $m \angle AOB = 30$ व $m \angle BOC = 45$ आहे.

तर $m \angle AOC = 75$ होईल.

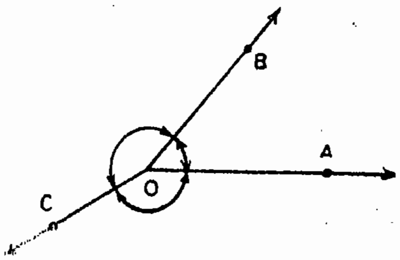
म्हणजेच, $m \angle AOC = m \angle AOB + m \angle BOC$. अर्थात कोनाच्या अंतर्भागातील कोणत्याही बिंदूकरता कोनांच्या मापांतील हा संबंध पडताळून पाहता येईल. कोनांच्या मापांचा हा गुणधर्म आपण पुढील गृहीतकात व्यक्त करू.

गृहीतक 11 : कोनांच्या बेरजेचे गृहीतक (Angle Addition Postulate)
$\angle AOC$ च्या अंतर्भागात B हा कोणताही बिंदू असेल तर
$m\angle AOC = m\angle AOB + m\angle BOC$.

वरील गृहीतकातील $\angle AOB$ व $\angle BOC$ हे संलग्न कोन आहेत हे आ. 3·23 वरून तुमच्या सहज लक्षात येईल. परंतु $\angle AOB$ व $\angle BOC$ हे कोणतेही संलग्न कोन असतील तर,

$$m\angle AOB + m\angle BOC = m\angle AOC$$

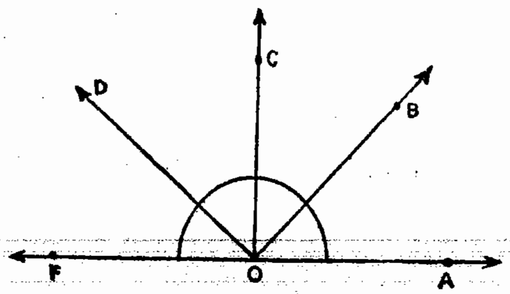
हे विधान सत्य राहीलच असे म्हणता येणार नाही. उदाहरणार्थ, आ. 3·24 मध्ये $\angle AOB$ व $\angle BOC$ हे संलग्न कोन आहेत. पण त्यांच्या मापांची बेरीज ही $\angle AOC$ च्या मापाएवढी नाही. याचे कारण B बिंदू हा $\angle AOC$ च्या अंतर्भागात नाही.



आ. 3·24

§ 3·14 प्रश्न :

1. बाजूच्या आकृतीत $m\angle AOB = 50$, $m\angle BOC = 40$ व $m\angle COD = 45$ आहे. तर $m\angle AOC$, $m\angle BOD$ व $m\angle AOD$ सांगा.



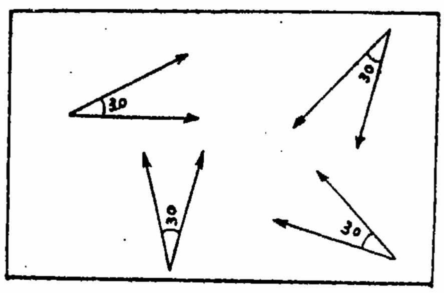
आ. 3·25

2. आ. 3·25 वरून खालील विधाने सत्य आहेत की असत्य आहेत ते सकारण सांगा :
   (a) $m\angle AOB + m\angle BOD = m\angle AOD$.
   (b) $m\angle AOC + m\angle BOD = m\angle AOD$.
   (c) $m\angle AOD + m\angle DOC = m\angle AOC$.

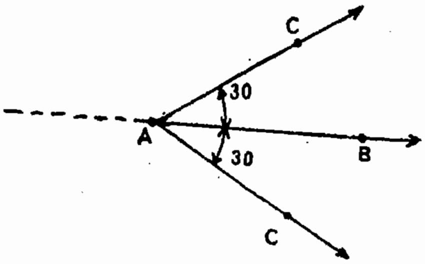
3. कोणत्याही दोन कोनांच्या मापांच्या बेरजेएवढे माप असलेला कोन असू शकतो का ? कारणे द्या.

§ 3·15 कोनरचना (Angle Construction) :

कोनमापनाच्या गृहीतकानुसार, कोणत्याही कोनाशी 0 व 180 यांच्या दरम्यान असलेली एक आणि एकच वास्तव संख्या निगडित असते. ही संख्या त्या कोनाचे माप असते. आता 0 व 180 यांच्या दरम्यान एखादी वास्तव संख्या दिली आहे असे समजा. या संख्येइतके माप असलेला कोन काढता येतो का ? काढता येत असल्यास असे किती कोन काढता येतील ? समजा दिलेली वास्तव संख्या 30 आहे. आता एकाच प्रतलात 30 माप असलेले असंख्य कोन असतात हे उघडच आहे. (आ. 3·26 पाहा) समजा त्या प्रतलात एक किरण AB दिला आहे आणि आपल्याला किरण AC हा त्या प्रतलात असा काढायचा आहे की $m\angle BAC = 30$ होईल.



आ. 3·26

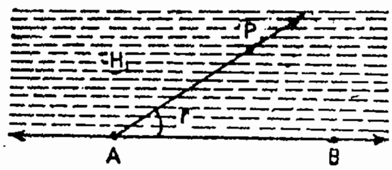


आ. 3·27

आ. 3·27 वरून असे दिसते की, आपल्याला असे दोन किरण काढता येतात. यांपैकी एक किरण रेषा AB च्या एका बाजूस असतो व दुसरा तिच्या दुसऱ्या बाजूस असतो. अर्थात रेषा AB च्या एकाच अर्धप्रतलाचा विचार केल्यास त्यात $m\angle BAC = 30$ होईल असा एकच किरण AC काढता येतो. हीच वस्तुस्थिती खालील गृहीतकात सांगितली आहे.

गृहीतक 12 : कोनरचनेचे गृहीतक (Angle Construction Postulate)

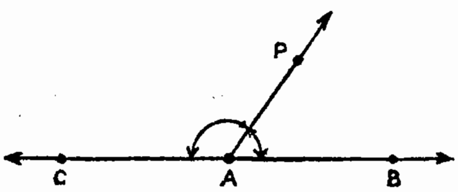
H या अर्धप्रतलाची कडा असलेल्या रेषेवर, AB हा एक किरण आहे. r ही 0 पेक्षा मोठी व 180 पेक्षा लहान अशी कोणतीही एक वास्तव संख्या आहे. तर $m\angle BAP = r$ होईल व P हा H या अर्धप्रतलात राहील असा, किरण AP हा एक आणि एकच किरण असतो. (आ. 3·28)



आ. 3·28

§ 3·16 कोनांची रेषीय जोडी (Linear Pair of Angles) :

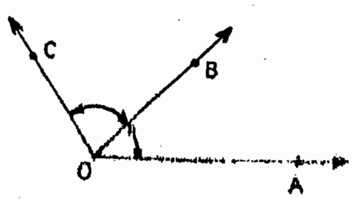
व्याख्या : जर किरण AB व किरण AC हे विरुद्ध किरण असतील व किरण AP हा त्यांच्या समाईक अंत्यबिंदूतून निघणारा इतर कोणताही किरण असेल तर $\angle BAP$ व $\angle PAC$ या कोनांच्या जोडीला **रेषीय जोडी** म्हणतात.



आ. 3·29

रेषा BC वरील A या कोणत्याही बिंदूतून त्या रेषेबाहेर किरण AP हा कोणताही किरण घेतल्यास कोनांची रेषीय जोडी मिळते. (आ. 3·29)

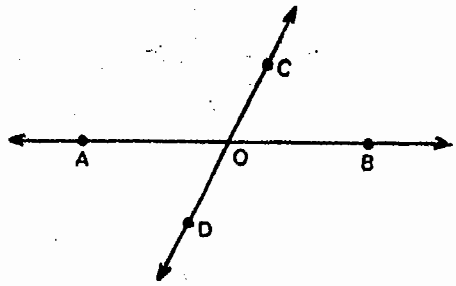
रेषीय जोडीतील कोन संलग्न कोन असतात. पण कोणत्याही दोन संलग्न कोनांनी रेषीय जोडी तयार होईलच असे नाही. आ. 3·30 मधील $\angle AOB$ व $\angle BOC$ हे संलग्न कोन आहेत. पण त्यांनी रेषीय जोडी तयार होत नाही. कारण त्यांच्या भुजा OA व भुजा OC या विरुद्ध किरण नाहीत.



आ. 3·30

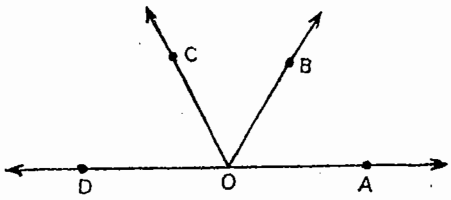
§ 3·17 प्रश्न :

1. रेषा AB व रेषा CD परस्परांस O बिंदूत छेदत असतील तर होणाऱ्या कोनांच्या सर्व रेषीय जोड्या सांगा.



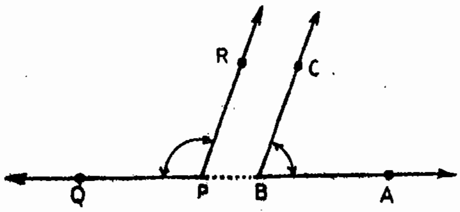
आ. 3·31

2. आ. 3·32 मधील कोनांच्या दोन रेषीय जोड्या सांगा. ∠BOC व ∠COD या कोनांमुळे रेषीय जोडी तयार होते का ?



आ. 3·32

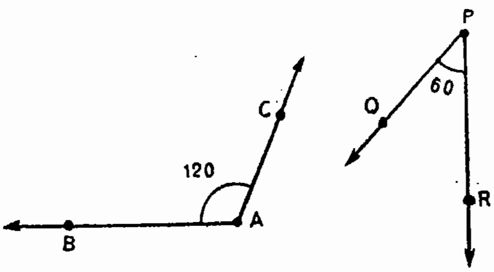
3. आ. 3·33 मधील ∠ABC व ∠RPQ यांनी रेषीय जोडी तयार होईल का ? कारणे द्या.



आ. 3·33

§ 3·18 कोनांच्या आणखी काही जोड्या व कोनांचे प्रकार :

व्याख्या : पूरक कोन (Supplementary Angles)



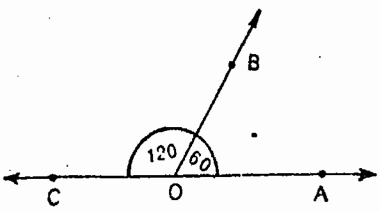
आ. 3·34

ज्या दोन कोनांच्या मापांची बेरीज 180 असते. त्यांना (परस्परांचे) **पूरक-कोन** म्हणतात.

बाजूच्या आकृतीत $m\angle BAC = 120$ व $m\angle QPR = 60$ आहे. म्हणून हे दोन कोन पूरक कोन आहेत.

टीप : जर दोन कोन (परस्परांचे) पूरक कोन असतील तर एका कोनाला दुसऱ्याचा पूरक कोन म्हणतात.

§ 3·19 समजा रेषा AC वरील O या बिंदूतून किरण OB असा काढला की, $m\angle AOB = 60$. ∠BOC मोजून पाहिल्यास त्याचे माप 120 असते हे तुम्हांला दिसून येईल. आता ∠AOB व ∠BOC हे रेषीय जोडीतील कोन आहेत, आणि हे कोन पूरक आहेत, हे पडताळून पाहता येते. रेषीय जोडीतील कोणत्याही कोनांच्या बाबतीत हा गुणधर्म पडताळून पाहता येईल. हा गुणधर्म आपण गृहीतक म्हणून घेणार आहोत.



आ. 3·35

गृहीतक 13 : पूरक कोनांचे गृहीतक (Supplementary Angles Postulate)

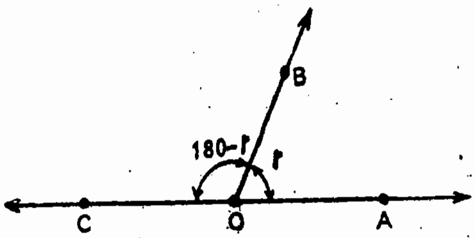
रेषीय जोडीतील कोनांच्या मापांची बेरीज 180 असते.

याचाच अर्थ असा होतो की, रेषीय जोडीतील कोन पूरक कोन असतात.

§ 3·20 रेषीय जोडीतील कोन संलग्न असतात, पण प्रत्येक संलग्न कोनांची जोडी रेषीय असतेच असे नाही, हे आपण वर पाहिले आहे. दोन संलग्न कोनांमुळे रेषीय जोडी केव्हा तयार होईल हे खालील प्रमेयात सांगितले आहे. या प्रमेयाची सिद्धता आपण पुढे प्रकरण 5 मध्ये पाहू.

§ 3·21 ▪ **रेषीय जोडीतील कोनांचे प्रमेय :**

दोन संलग्न कोनांच्या मापांची बेरीज 180 असेल तर त्यांच्या असमाईक भुजा विरुद्ध किरण असतात.



आ. 3·36

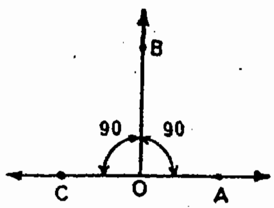
$\angle AOB$ व $\angle BOC$ हे दोन संलग्न कोन आहेत. वरील प्रयोगानुसार, जर

$m\angle AOB + m\angle BOC = 180$

असेल (म्हणजेच, दोन संलग्न कोन जर पूरक कोन असतील) तर किरण OA व किरण OC विरुद्ध किरण असतात. म्हणजेच ते एका रेषेत असतात.

§ 3·22 **व्याख्या : काटकोन** (Right Angle) :

रेषीय जोडीतील कोन समान मापांचे असतील तर तिच्यातील प्रत्येक कोनाला **काटकोन** म्हणतात.



आ. 3·37

या व्याख्येवरून व पूरक कोनांच्या गृहीतकावरून खालील गुणधर्म लगेच मिळतो.

(A) **प्रत्येक काटकोनाचे माप 90 असते.**

[रेषीय जोडीतील कोन काटकोन असतील तर त्यांची मापे समान असतात. समजा प्रत्येक कोनाचे माप r आहे. म्हणून वरील गृहीतकानुसार $r + r = 180$. $\therefore\ r = 90$]

व्याख्या : कोटिकोन (Complementary Angles)

ज्या दोन कोनांच्या मापांची बेरीज 90 असते त्यांना (परस्परांचे) **कोटिकोन** म्हणतात.

व्याख्या : विशालकोन (Obtuse angle)

ज्या कोनाचे माप 90 पेक्षा मोठे असते त्याला **विशालकोन** म्हणतात.

व्याख्या : लघुकोन (Acute angle)

ज्या कोनाचे माप 90 पेक्षा कमी असते त्याला **लघुकोन** म्हणतात.

या व्याख्यांवरून खालील गुणधर्म सहज सिद्ध करता येतात.

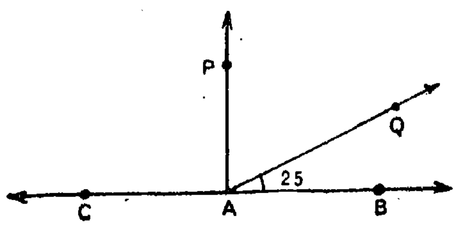
(B) **रेषीय जोडीतील एक कोन लघुकोन असेल तर दुसरा विशालकोन असतो.**

(C) **दोन कोटिकोनांतील प्रत्येक कोन लघुकोन असतो.**

(D) **रेषीय जोडीतील एक कोन काटकोन असेल तर दुसराही कोन काटकोन असतो.**

3·23 प्रश्न :

1. जर $m\angle A = 30$, $m\angle B = 120$ व $m\angle C = 60$ असेल तर खालील विधाने पूर्ण करा.
   (a) $\angle A$ व $\angle C$ हे परस्परांचे ········· कोन आहेत.
   (b) $\angle B$ हा $\angle\cdots$ चा पूरक आहे.
   (c) $\angle B$ हा विशालकोन असून $\angle\cdots$ व $\angle\cdots$ हे लघुकोन आहेत.
2. आ. 3·38 मध्ये, $m\angle PAB = 90$ व $m\angle BAQ = 25$ आहे.

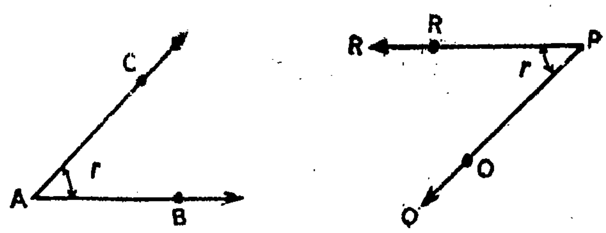


आ. 3·38

तर (a) $\angle PAC$, $\angle PAQ$ व $\angle CAQ$ यांची मापे सांगा.
(b) $\angle PAQ$ चा कोटिकोन व $\angle BAQ$ चा पूरक कोन सांगा.
(c) आकृतीतील संलग्न कोनांच्या तीन जोड्या सांगा व प्रत्येक कोनाचे माप सांगा.
(d) आकृतीत पूरक कोनांच्या किती जोड्या दाखवल्या आहेत ? त्यांची नावे सांगा व प्रत्येक कोनाचे माप सांगा.

§ 3·24 एकरूप कोन (Congruent Angles) :

व्याख्या : दोन कोनांची मापे समान असतील तर त्यांना **एकरूप कोन** म्हणतात.



आ. 3·39

एकरूपता '$\cong$' या चिन्हाने दाखवतात. वरील आकृतीत $m\angle BAC = m\angle QPR$ आहे. म्हणून हे कोन एकरूप आहेत. म्हणजेच, $\angle BAC \cong \angle QPR$.

एकरूपतेच्या व्याख्येवरून खालील गुणधर्म सहज दिसून येतात.

(i) $\angle A \cong \angle A$, (प्रत्येक कोन स्वतःशी एकरूप असतो.)

(ii) जर $\angle A \cong \angle B$, तर $\angle B \cong \angle A$,

व (iii) जर $\angle A \cong \angle B$ व $\angle B \cong \angle C$, तर $\angle A \cong \angle C$.

या ठिकाणी हे लक्षात ठेवले पाहिजे की, जेव्हा दोन कोनांची **मापे** समान असतात तेव्हा आपण त्यांना **एकरूप** कोन म्हणतो, समान कोन म्हणू शकत नाही. कारण कोन हे बिंदूसंच आहेत. त्यामुळे, जेव्हा त्या दोन संचात तेच ते घटक असतील तेव्हाच आपण त्यांना समान कोन म्हणू शकू. म्हणजे '$\angle ABC = \angle PQR$' याचा अर्थ असा होतो की $\angle ABC$ व $\angle PQR$ ही एकाच कोनाची दोन नावे आहेत.

§ 3·25 एकरूप कोनांच्या व्याख्येवरून खालील गुणधर्म सहज सिद्ध करता येतात.

(a) **जर दोन कोन एकरूप असून परस्परांचे पूरक असतील तर त्यांतील प्रत्येक कोन काटकोन असतो.**

(b) **जर दोन कोन एकरूप असतील तर त्यांचे पूरक कोनही एकरूप असतात.**

(c) **जर दोन लघुकोन एकरूप असतील तर त्यांचे कोटिकोनही एकरूप असतात.**

नमुन्याकरता आपण गुणधर्म (a) ची सिद्धता पाहू.

सिद्धता देण्यापूर्वी आपण काही संज्ञांचे अर्थ समजावून घेऊ. भूमितीतील प्रमेय ही बहुधा 'जर—तर—' या स्वरूपाची विधाने असतात. अशा विधानात दोन विधाने, 'जर–तर' या शब्दांनी जोडलेली असतात. यांतील पहिल्या ('जर' नंतर येणाऱ्या) विधानाला प्रमेयाचा **पक्ष** म्हणतात व दुसऱ्या ('तर' नंतर येणाऱ्या) विधानाला प्रमेयाचे **साध्य** म्हणतात. जर–तर स्वरूपांच्या विधानाचा विचार आपण प्रकरण 5 मध्ये जास्त विस्ताराने करू.

आता आपण वरील गुणधर्म (a) सिद्ध करू.

पक्ष : समजा $\angle A$ व $\angle B$ हे एकरूप कोन आहेत, तसेच ते पूरक कोनही आहेत.

साध्य : $\angle A$ व $\angle B$ हे प्रत्येकी काटकोन आहेत.

सिद्धता : $\angle A$ व $\angle B$ पूरक कोन असल्यामुळे, $m\angle A + m\angle B = 180$ .... (1)

तसेच $\angle A$ व $\angle B$ एकरूप असल्यामुळे, $m\angle A = m\angle B$ .... (2)

(1) व (2) वरून, $m\angle A + m\angle A = 180$

$\therefore\ 2m\angle A = 180, \quad \therefore\ m\angle A = 90$

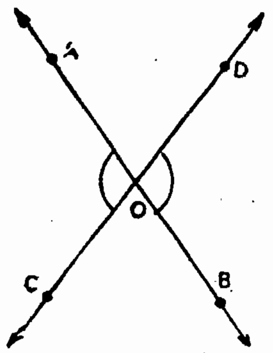
व (2) वरून, $m\angle B = 90$.

यावरून $\angle A$ व $\angle B$ काटकोन आहेत हे सिद्ध होते.

याचप्रमाणे (b) व (c) यांच्या सिद्धता लिहा.

§ 3·26 दोन कोनांची मापे समान असतील तर त्यांना एकरूप कोन म्हणतात हे आपण वर पाहिले. आता जर दोन कोनांची मापे समान नसतील, तर एकाचे माप दुसऱ्याच्या मापापेक्षा मोठे असले पाहिजे. समजा $\angle A$ व $\angle B$ हे दिलेले कोन असून $m\angle A > m\angle B$ अशा वेळी '$\angle A$ हा $\angle B$ पेक्षा मोठा आहे' किंवा '$\angle B$ हा $\angle A$ पेक्षा लहान आहे' असे आपण म्हणू व हे $\angle A > \angle B$ किंवा $\angle B < \angle A$ असे लिहू.

§ 3·27 **विरुद्ध कोन** (Vertical Angles) :



आ. 3·40

समजा, रेषा AB व रेषा CD आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे O बिंदूत छेदतात. या दोन रेषांमुळे $\angle AOC$, $\angle COB$, $\angle BOD$ व $\angle DOA$ हे चार कोन मिळतात. या सर्व कोनांचा शिरोबिंदू O हाच आहे. या कोनांपैकी $\angle AOC$ व $\angle BOD$ यांच्या भुजांमुळे विरुद्ध कोनांच्या दोन जोड्या मिळतात. (किरण OC व किरण OD हे विरुद्ध किरण आहेत, तसेच, किरण OA व किरण OB हे विरुद्ध किरण आहेत.) म्हणून $\angle AOC$ व $\angle BOD$ यांना विरुद्ध कोन म्हणतात. त्याचप्रमाणे $\angle COB$ व $\angle DOA$ हे देखील विरुद्ध कोन होतात.

व्याख्या : ज्या दोन कोनांचा शिरोबिंदू एकच असतो व ज्यांच्या भुजांनी विरुद्ध किरणांच्या दोन जोड्या तयार होतात, त्या कोनांना **विरुद्ध कोन** म्हणतात.

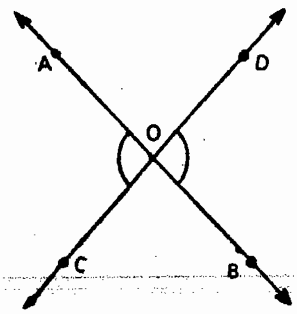
विरुद्ध कोनांची मापे समान असतात (म्हणजेच ते कोन एकरूप असतात) हे तुम्ही मागील वर्गात प्रायोगिक पद्धतीने पडताळून पाहिले आहे. हाच गुणधर्म आपण खालील प्रमेयात सिद्ध करू.

§ 3·28 ▪ विरुद्ध कोनांचे प्रमेय :

जर दोन रेषा एकमेकींस छेदत असतील तर होणारे विरुद्ध कोन एकरूप असतात.

पक्ष : रेषा AB व रेषा CD एकमेकींस O बिंदूत छेदतात.

साध्य : $\angle AOC \cong \angle BOD$ व $\angle AOD \cong \angle BOC$.



आ. 3·41

सिद्धता : किरण OA व किरण OB हे विरुद्ध किरण आहेत.

म्हणून

$\angle AOD$ व $\angle BOD$

हे रेषीय जोडीतील कोन होतात.

म्हणून पूरक कोनांच्या गृहीतकावरून,

(1) $m\angle AOD + m\angle BOD = 180$

असे म्हणता येते. त्याचप्रमाणे $\angle AOD$ व $\angle AOC$ हे रेषीय जोडीतील कोन असल्यामुळे,

(2) $m\angle AOD + m\angle AOC = 180$

(3) $\therefore m\angle AOD + m\angle BOD = m\angle AOD + m\angle AOC$

(4) $\therefore m\angle BOD = m\angle AOC$

(5) $\therefore \angle AOC \cong \angle BOD$

हेच आपल्याला सिद्ध करायचे होते.

याचप्रमाणे $\angle AOD \cong \angle BOC$ हेही सिद्ध करता येईल. दुसऱ्या भागाची सिद्धता, 'एकरूप कोनांचे पूरक कोन एकरूप असतात' या गुणधर्माचा उपयोग करूनही देता येईल.

§ 3·29 वरील सिद्धतेचा अभ्यास केल्यावर तुमच्या असे लक्षात येईल की, सिद्धतेतील प्रत्येक विधानाला आपण एखादया गृहीतकाचा, व्याख्येचा किंवा वास्तव संख्यांच्या बैजिक गुणधर्मांचा आधार घेतला आहे. (1) व (2) मधील विधानांना एका गृहीतकाचा (पूरक कोनांचे गृहीतक) आधार दिला आहे. (3) मधील विधान हे समानतेच्या गुणधर्मावरून मिळाले. (4) मधील विधान बेरजेच्या लोपनाचा नियम (cancellation law) वापरून मिळाले व शेवटचे (5) मधील विधान कोनांच्या एकरूपतेच्या व्याख्येवरून मिळाले.

दुसरी एक गोष्ट लक्षात येईल की, आकृतीमुळे सिद्धतेतील पायऱ्या समजण्यास मदत होते. म्हणून सिद्धता लिहिण्यापूर्वी, पक्षातील माहिती प्रतिबिंबित होईल अशी आकृती काढावी. आकृतीवरून प्रमेयातील विधानांचे व त्यातील संज्ञांचे परस्पर संबंध अनेकदा लगेच लक्षात येतात. हे संबंध लक्षात घेऊन, सिद्ध करायचे विधान पक्षापासून पायरीपायरीने मिळवता येते. परंतु येथे हे लक्षात ठेवले पाहिजे की, केवळ आकृतीवरून दिसून येणारा संबंध किंवा गुणधर्म सत्य आहे असे आपल्याला म्हणता येणार नाही. तर सिद्धतेतील प्रत्येक पायरीतील विधानाला एखादया गृहीतकाचा, व्याख्येचा किंवा आधी सिद्ध झालेल्या गुणधर्मांचा आधार असावा लागतो. गणितात जेव्हा आपल्याला एखाद्या विधानाचे कारण सांगता येते, तेव्हाच आपण ते स्वीकारतो.

एखादया विधानाची सिद्धता कशी दयायची याचे तंत्र तुम्हांला सतत अभ्यासावे लागणार आहे. गणिताच्या कोणत्याही शाखेचा तो एक महत्त्वाचा भाग आहे. तेव्हा सुरवातीच्या प्रकरणातील सिद्धतांचा तुम्ही काळजीपूर्वक अभ्यास केल्यास हे तंत्र तुम्हांला समजून येईल. पक्षापासून साध्यापर्यंत पोहोचवणाऱ्या विधानांच्या साखळीतील दुवे कसे शोधायचे हे तुमच्या लक्षात येऊन तुम्ही स्वतःच सिद्धता लिहू शकाल. भूमिती शिकण्याचा सर्वांत मोठा आनंद स्वतः सिद्धता देण्यात आहे हे तुमच्या लक्षात येईल.

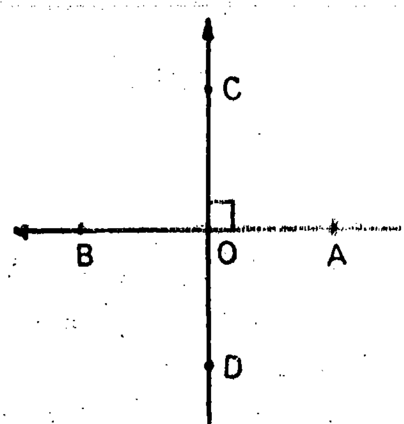
§ 3·30 ■ काटकोनांचे प्रमेय :

एकमेकींना छेदणाऱ्या दोन रेषांनी तयार होणाऱ्या चार कोनांपैकी एक कोन काटकोन असेल, तर इतर प्रत्येक कोन काटकोन असतो.

पक्ष : रेषा AB व रेषा CD एकमेकींस O बिंदूत छेदतात व $\angle AOC$ हा काटकोन आहे.

साध्य : $\angle COB$, $\angle BOD$ व $\angle AOD$ हे सर्व काटकोन आहेत.

(खालील सिद्धतेत शब्द गाळले आहेत. ते भरून सिद्धता पूर्ण करा.)



आ. 3·42

सिद्धता : विरुद्ध कोनांच्या प्रमेयावरून,

$\angle AOC \cong \angle$......

पण $\angle AOC$ काटकोन आहे. (पक्ष)

$\therefore$ $\angle$.........हा काटकोन आहे.

आता $\angle AOC$ व $\angle$.........हे रेषीय जोडीतील कोन आहेत.

तसेच, $\angle AOC$ व $\angle$.........हे देखील रेषीय जोडीतील कोन आहेत.

यांतील $\angle AOC$ काटकोन आहे.

$\therefore$ $\angle$.........व $\angle$.........प्रत्येकी काटकोन आहेत. [§ 3·22 गुणधर्म (D)]

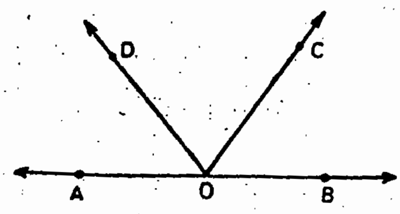
यावरून $\angle BOD$, $\angle COB$ व $\angle AOD$ हे काटकोन आहेत हे सिद्ध होते.

वरील सिद्धतेत आपण $\angle AOC$ काटकोन आहे असे गृहीत धरून उरलेले कोन काटकोन आहेत हे सिद्ध केले. त्याचप्रमाणे $\angle BOD$, $\angle COB$ व $\angle AOD$ यांपैकी कोणताही कोन काटकोन समजून उरलेले तीनही कोन काटकोन आहेत हे सिद्ध करता येईल.

§ **3·31** प्रमेय 3·28 व प्रमेय 3·30 यांच्या सिद्धतांवरून तुमच्या लक्षात येईल की, प्रमेयात कधी कधी आपल्याला एकापेक्षा जास्त गोष्टी सिद्ध करायच्या असतात. त्यांपैकी आपण एक गोष्ट सिद्ध करून, 'त्याचप्रमाणे, इतर गोष्टी सिद्ध करता येतील' असे म्हणतो, उदाहरणार्थ प्रमेय 3·28 मध्ये आपण $\angle AOC \cong \angle BOD$ हे सिद्ध केले व 'त्याचप्रमाणे, $\angle AOD \cong \angle BOC$ सिद्ध करता येईल' असे म्हटले. कोणत्याही प्रमेयात एकाहून जास्त गोष्टी सिद्ध करताना असे करता येईल का? की कधी कधी प्रत्येक गोष्टीची स्वतंत्र सिद्धता द्यावी लागेल? या बाबतीत हे लक्षात ठेवावे की जेव्हा सिद्ध करायच्या विधानां-मधील बिंदू, रेषा, कोन यांच्या केवळ नावांमध्येच फरक असेल व एका विधानाच्या सिद्धतेत केवळ या नावांचा फरक करून दुसऱ्या विधानाची सिद्धता मिळत असेल, तेव्हाच आपण 'त्याचप्रमाणे, दुसरे विधान सिद्ध करता येईल' असे म्हणू शकतो. जर दुसऱ्या विधानाची सिद्धता देताना वेगळाच युक्तिवाद करावा लागत असेल किंवा वेगळ्याच गुणधर्मांचा आधार घ्यावा लागत असेल तर त्या विधानाची स्वतंत्र सिद्धता द्यावी लागेल.

§ 3·32 **प्रश्न :**

1. रिकाम्या जागा भरून खालील विधाने पूर्ण करा :
   (a) रेषा QR वर Q व R यांच्या दरम्यान, P हा कोणताही बिंदू आहे. P मधून निघणारा व रेषा QR वर नसलेला किरण PM हा कोणताही किरण आहे. तर $\angle QPM$ व $\angle RPM$ यांना············कोन म्हणतात.
   (b) ज्या दोन कोनांच्या मापांची बेरीज············असते, त्यांना पूरक कोन म्हणतात.
   (c) रेषीय जोडीतील कोन एकरूप असतील तर प्रत्येक कोन············असतो.
   (d) जर दोन संलग्न कोनांच्या असमाईक भुजा विरुद्ध किरण असतील तर ते············कोन असतात.
2. खाली काही कोनांची मापे दिली आहेत. या कोनांच्या पूरककोनांची मापे सांगा.
   (a) 75 (b) 125 (c) x (d) $180-r$
   (e) $90-r$ (f) $90+r$ (g) 90
3. खाली काही कोनांची मापे दिली आहेत. या कोनांच्या कोटिकोनांची मापे सांगा.
   (a) 35 (b) 45 (c) $90-r$ (d) x
4. खाली काही कोनांची मापे दिली आहेत. त्यांपैकी कोणत्या कोनांचे कोटिकोन असू शकतात. कारणे द्या.
   (a) 40 (b) 90 (c) 135
5. जर दोन कोटिकोनांची मापे समान असतील, तर प्रत्येक कोनाचे माप किती?
6. एका दिलेल्या कोनाच्या पूरक कोनाचे माप, त्या कोनाच्या मापाच्या 3 पट आहे, तर त्या कोनाचे माप सांगा.
7. बाजूच्या आकृतीत $\angle COD$ काटकोन आहे. जर $m\angle COB = r$ असेल तर $m\angle AOD$ किती?

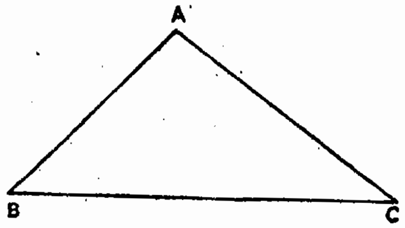


आ. 3·43

§ 3·33 **त्रिकोण** (Triangle) :

त्रिकोण म्हणजे काय हे तुम्हांला माहीत आहेच. त्रिकोणाची व्याख्या आपण पुन्हा पाहू.

व्याख्या : जर A, B व C हे तीन **नैकरेषीय** बिंदू असतील तर रेखAB, रेखBC व रेखCA यांच्या संयोगाला **त्रिकोण** म्हणतात.



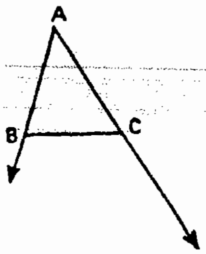
आ. 3·44

हा त्रिकोण $\triangle$ ABC या चिन्हाने दाखवतात.

$\triangle$ ABC = रेखAB $\cup$ रेखBC $\cup$ रेखCA. रेखAB, रेखBC व रेखCA या रेषाखंडांना $\triangle$ ABC च्या **बाजू** किंवा **भुजा** (Sides) म्हणतात व A, B, C या बिंदूंना $\triangle$ ABC चे **शिरोबिंदू** किंवा **कोनबिंदू** (Vertices) म्हणतात.

त्रिकोणाच्या व्याख्येवरून आपल्याला दिसून येते की त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन बाजूंना एक समाईक अंत्यबिंदू असतो. पण तीनही बाजूंना समाईक असा एकही बिंदू नसतो.

$\triangle$ ABC च्या बाजू AB, बाजू BC व बाजू CA यांमुळे $\angle$ ABC, $\angle$ BCA व $\angle$ CAB हे तीन कोन निश्चित होतात. यांना $\triangle$ ABC चे कोन म्हणतात.



आ. 3·45

आता $\angle$ CAB ला आपण $\triangle$ ABC चा कोन म्हणत असलो तरी याचा अर्थ तो कोन, $\triangle$ ABC या संचाचा उपसंच आहे, असा होत नाही. कारण $\triangle$ ABC हा रेख AB, रेख AC व रेख BC यांपासून तयार होतो, तर $\angle$ BAC हा किरण AB व किरण AC या संपूर्ण किरणांपासून तयार होतो. परंतु $\triangle$ ABC च्या बाजू AB व बाजू AC यांमुळे $\angle$ CAB निश्चित होत असल्यामुळे आपण या कोनाला $\triangle$ ABC चा कोन म्हणतो.

$\triangle$ ABC च्या बाजू BC ला '$\angle$ A **समोरील बाजू**' म्हणतात. तसेच $\angle$ A ला '**बाजू** BC **समोरील कोन**' म्हणतात.

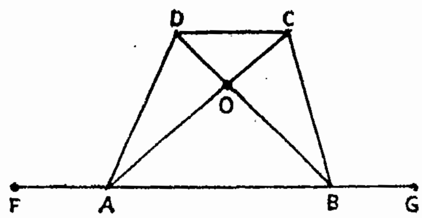
याचप्रमाणे त्रिकोणाच्या इतर बाजू व कोन यांच्या बाबतीत म्हणता येईल.

$\angle$ BAC ला 'बाजू AB व बाजू AC यांमधील कोन' म्हणतात व बाजू BC ला '$\angle$ B व $\angle$ C यांमधील बाजू' म्हणतात.

टीप : त्रिकोणाच्या तीनही बाजू एकाच प्रतलात असतात. म्हणजेच त्रिकोण ही एक, प्रतलीय आकृती (plane figure) आहे. (हे विधान कोणत्या प्रमेयावरून मिळते ?)

§ 3·34 **प्रश्न :**

1. आ. 3·46 मध्ये किती त्रिकोण आहेत ? त्या त्रिकोणांची नावे लिहा.



आ. 3·46

2. $\triangle$ PRQ चे शिरोबिंदू, बाजू व कोन लिहा.

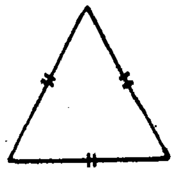
3. एका त्रिकोणाचे $\angle$ DFK व $\angle$ FKD हे दोन कोन आहेत. तर या त्रिकोणाच्या तिसऱ्या कोनाचे नाव लिहा.

4. एका त्रिकोणाचा $\angle$ ACB हा एक कोन असून रेख PQ ही त्या कोनासमोरील बाजू आहे. तर त्या त्रिकोणाचे नाव लिहा.

§ 3·35 त्रिकोणांचे प्रकार :

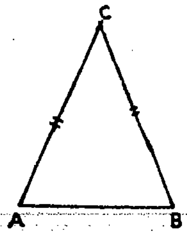
व्याख्या :

(a) **समभुज त्रिकोण** (Equilateral Triangle) : ज्या त्रिकोणाच्या तीनही भुजा एकरूप असतात (म्हणजेच समान लांबींच्या असतात) त्याला समभुज त्रिकोण म्हणतात.



आ. 3·47

(b) **समद्विभुज त्रिकोण** (Isosceles Triangle) : ज्या त्रिकोणाच्या दोन भुजा एकरूप असतात त्याला समद्विभुज त्रिकोण म्हणतात.

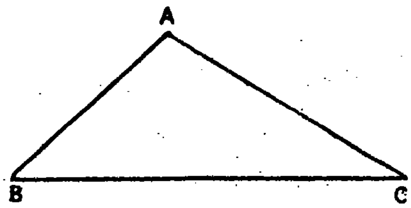


आ. 3·48

$\triangle$ ABC मध्ये, बाजू AC $\cong$ बाजू BC असेल तर तो समद्विभुज त्रिकोण होतो. अशा वेळी, त्रिकोणांच्या एकरूप बाजूंना वगळून उरलेल्या बाजूला (या ठिकाणी, बाजू AB ला) त्या त्रिकोणाचा **पाया** म्हणतात. ती बाजू ज्या दोन कोनांमध्ये असते त्या कोनांना (या ठिकाणी, $\angle$ B व $\angle$ A यांना) **पायालगतचे कोन** म्हणतात.

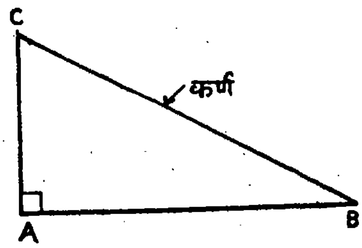
वास्तविक त्रिकोणाच्या कोणत्याही बाजूला आपण पाया म्हणू शकतो. विशेषतः क्षेत्रफळाच्या संदर्भात आपण तसे म्हणणारही आहोत. परंतु ज्यावेळी, विशिष्ट बाजूचा उल्लेख न करता केवळ 'समद्विभुज त्रिकोणाचा पाया' असे म्हटले जाईल, त्यावेळी 'पाया' म्हणजे त्या त्रिकोणाच्या एकरूप बाजू वगळून उरलेली बाजू असे समजावे.

(c) **विषमभुज त्रिकोण** (Scalene Triangle) : ज्या त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन भुजा एकरूप नसतात, त्याला विषमभुज त्रिकोण म्हणतात.



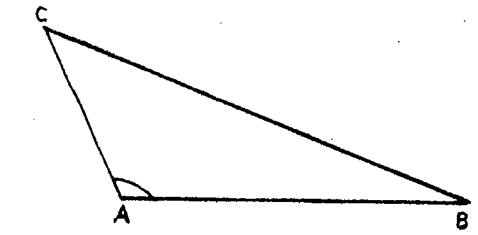
आ. 3·49

(d) **काटकोन त्रिकोण** (Right Angled Triangle) : ज्या त्रिकोणाचा एक कोन काटकोन असतो, त्याला काटकोन त्रिकोण म्हणतात.



आ. 3·50

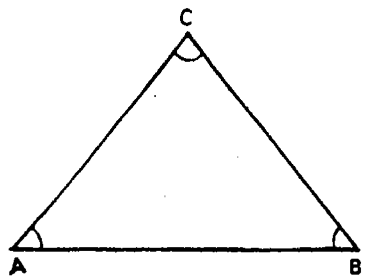
काटकोन त्रिकोणात काटकोनासमोरील बाजूला त्या त्रिकोणाचा **कर्ण** (Hypotenuse) म्हणतात.



आ. 3·51

(e) **विशालकोन त्रिकोण** (Obtuse Angled Triangle) :

ज्या त्रिकोणाचा **एक** कोन विशाल कोन असतो, त्याला विशालकोन त्रिकोण म्हणतात.

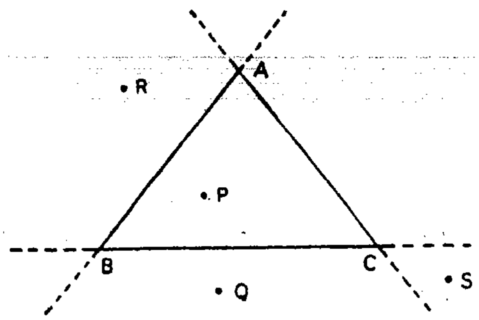


आ. 3·52

(f) **लघुकोन त्रिकोण** (Acute Angled Triangle) :

ज्या त्रिकोणाचा **प्रत्येक** कोन लघुकोन असतो, त्याला लघुकोन त्रिकोण म्हणतात.

§ 3·36 **त्रिकोणाचा अंतर्भाग** (Interior of a Triangle) :

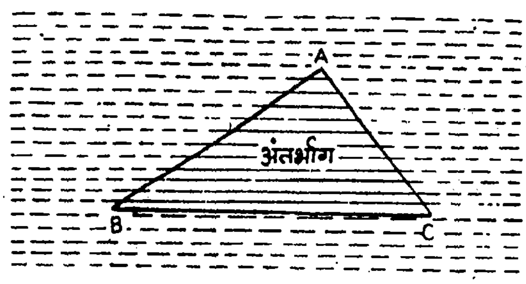


आ. 3·53

आ. 3·53 मध्ये △ ABC दाखवला असून त्या त्रिकोणाच्या प्रतलात P, Q, R, व S हे बिंदू घेतले आहेत. आकृतीवरून असे दिसते की, P हा त्रिकोणाच्या अंतर्भागात आहे व Q, R व S हे बिंदू त्रिकोणाच्या बहिर्भागात आहेत. P बिंदू △ ABC च्या कोण-कोणत्या कोनांच्या अंतर्भागात आहे ? तसेच Q किंवा S हा बिंदू त्रिकोणाच्या कोणत्या कोनांच्या अंतर्भागात आहे ? याधरून त्रिकोणाच्या अंतर्भागाची व्याख्या खालीलप्रमाणे करता येईल.

व्याख्या : त्रिकोणाच्या तीनही कोनांच्या अंतर्भागात असलेल्या सर्व बिंदूंच्या संचाला त्या **त्रिकोणाचा अंतर्भाग** म्हणतात.

त्रिकोणाच्या अंतर्भागात नसलेल्या व त्रिकोणांच्या बाजूंवर नसलेल्या त्रिकोणाच्या प्रतलातील सर्व बिंदूंच्या संचाला त्या त्रिकोणाचा **बहिर्भाग** (Exterior) म्हणतात.



आ. 3·54

जर P बिंदू △ ABC च्या अंतर्भागात असेल तर तो रेषा AB च्या C – बाजूस, रेषा BC च्या A – बाजूस व रेषा CA च्या B – बाजूस असतो.

त्रिकोणाचा अंतर्भाग हा त्या त्रिकोणाच्या तीनही कोनांच्या अंतर्भागांचा छेदसंच असतो.

त्रिकोणाचा अंतर्भाग हा बहिर्वक्र संच असतो.

आपण काय शिकलो ?

(1) **संज्ञा–व्याख्या :**

कोन; भुजा; शिरोबिंदू; कोनाचा अंतर्भाग; कोनाचा बहिर्भाग; पूरक कोन; काटकोन; कोटिकोन; विशालकोन; लघुकोन; एकरूप कोन; विरुद्ध कोन; त्रिकोण; समभुज त्रिकोण; समद्विभुज त्रिकोण; विषमभुज त्रिकोण; काटकोन त्रिकोण; विशालकोन त्रिकोण; लघुकोन त्रिकोण; त्रिकोणाचा अंतर्भाग.

(2) **कल्पना :**

कोनाचे लेखन; कोनांच्या एकरूपतेचे गुणधर्म; समोरील बाजू; समोरील कोन; सिद्धता देणे.

(3) **गृहीतके :**

(i) कोनमापन (ii) कोनांची बेरीज (iii) कोनरचना (iv) पूरक कोन (v) काटकोन.

(4) **प्रमेये :**

(i) दरम्यानता व कोनाचा अंतर्भाग
(ii) कोनाचा अंतर्भाग
(iii) रेषीय जोडीतील कोन
(iv) विरुद्ध कोन.

प्रश्नसंग्रह

1. खालील विधाने सत्य आहेत की असत्य आहेत ते सकारण सांगा.

(a) जर $m\angle A + m\angle B = 180$ असेल तर $\angle A$ व $\angle B$ हे पूरक कोन असतात.

(b) जर दोन कोनांच्या मापांची बेरीज 90 असेल तर प्रत्येक कोन लघुकोन असतो.

(c) जर दोन कोनांच्या मापांची बेरीज 180 असेल तर प्रत्येक कोन विशालकोन असतो.

(d) विशाल कोनाचा पूरक कोन हा लघुकोन असतो.

(e) परस्परांना छेदणाऱ्या रेषांनी पूरक कोनांच्या दोनच जोडया तयार होतात.

(f) जर $\angle A$ हा लघुकोन असेल तर तो विशाल कोन नसतो.

(g) जर $\angle A$ हा लघुकोन नसेल तर तो विशाल कोन असतो.

(h) जर $m\angle A = 60$ व $m\angle B = 60$ असेल तर $\angle A$ व $\angle B$ समान असतात.

(i) जर P बिंदू एखादया त्रिकोणाच्या अंतर्भागात नसेल तर तो त्या त्रिकोणाच्या बहिर्भागात असतो.

(j) जर P बिंदू एखादया त्रिकोणाच्या अंतर्भागात असेल तर तो त्या त्रिकोणाच्या बहिर्भागात नसतो.

(k) जर एखादा बिंदू त्रिकोणाच्या दोन कोनाच्या अंतर्भागात असेल तर तो तिसऱ्याही कोनाच्या अंतर्भागात असतो.

2. घड्याळाच्या काट्यांवरून खालील वेळी, लघुकोन, काटकोन व विशालकोन यांपैकी, कोणते कोन सूचित होतात ?

(a) 1 वाजता (b) 3 वाजता (c) 5 वाजता (d) 9 वाजता.

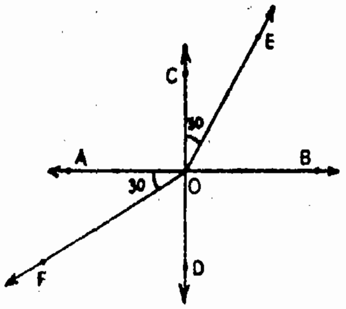
3. जर $90 < m\angle A < 180$ असेल तर $\angle A$ हा कोणत्या प्रकारचा कोन आहे ?

4. समजा $\angle A$ व $\angle B$ हे दिलेले कोन आहेत. जर $m\angle A = 90 + m\angle B$ असेल, तर $\angle A$ व $\angle B$ हे कोणत्या प्रकारचे कोन आहेत ?

5. खालील दोन विधानांचे अर्थ स्पष्ट करा.

(a) $\angle ABC \cong \angle PQR$, (b) $\angle ABC = \angle PQR$.

6. सोबतच्या आकृतीत $\angle BOC$ काटकोन आहे.



आ. 3·55

$m\angle COE = m\angle AOF = 30$.

यावरून, खालील प्रकारच्या कोनांच्या जोडया सांगा.

(a) पूरक कोन (b) कोटिकोन (c) एकरूप नसलेले कोन

(d) विरुद्ध कोन (e) संलग्न कोन.

या आकृतीतील, एकरूप असलेल्या दोन विशालकोनांची नावे सांगा व त्यांचे माप सांगा.

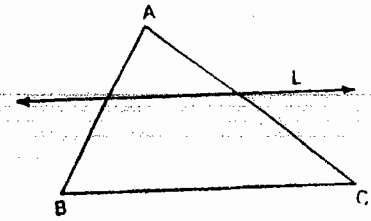
7. जर रेषा AB व रेषा CD या O बिंदूत छेदत असतील तर $\angle AOC \cong \angle BOD$ हे विधान नेहमी सत्य राहील का?

8. खालील विधानांना योग्य अशा आकृती काढा.

(a) दोन कोन संलग्न आहेत पण पूरक नाहीत.

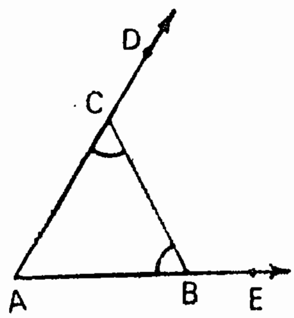
(b) दोन कोन परस्परांचे पूरक आहेत पण ते संलग्न नाहीत.

(c) दोन कोन संलग्न आहेत व पूरकही आहेत.



आ. 3·56

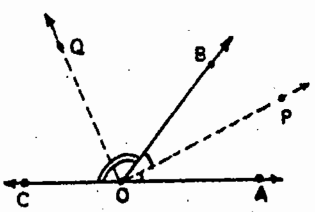
9. आ. 3·56 मध्ये L ही रेषा, $\triangle BAC$ च्या बाजू AB व बाजू AC यांना छेदते पण ती त्या त्रिकोणाच्या कोणत्याही शिरोबिंदूतून जात नाही. यावरून L ही रेषा बाजू BC ला का छेदू शकणार नाही ते सांगा.



आ. 3·57

10. आ. 3·57 मध्ये $\angle ABC \cong \angle ACB$ असेल, तर $\angle BCD \cong \angle CBE$ हे सिद्ध करा.

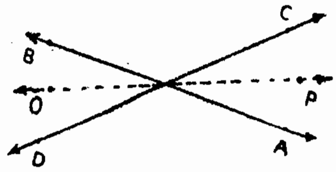
11. $\angle AOB$ च्या अंतर्भागात P हा बिंदू असेल व $\angle AOP \cong \angle POB$ असेल तर किरण OP ला $\angle ABC$ चा दुभाजक म्हणतात.



आ. 3·58

आ. 3·58 मध्ये $\angle AOB$ व $\angle BOC$ हे रेषीय जोडीतील कोन असून किरण OP व किरण OQ हे अनुक्रमे त्या कोनांचे दुभाजक आहेत. तर $\angle POQ$ हा काटकोन आहे, हे सिद्ध करा.

12. आकृती 3·59 मध्ये, रेषा AB व रेषा CD या O बिंदूत छेदतात असे समजा. किरण OP हा ∠ AOC चा दुभाजक आहे व किरण OP व किरण OQ विरुद्ध किरण आहेत. तर सिद्ध करा की किरण OQ हा ∠ BOD चा दुभाजक आहे.



आ. 3·59

13. बाजूच्या आकृतीत किरण OP व किरण OQ हे अनुक्रमे ∠ AOC व ∠ BOD चे दुभाजक असतील तर किरण OP व किरण OQ विरुद्ध किरण असतात हे सिद्ध करा.

14. जर $m\angle P = 29$ व $m\angle Q = 40$, तर खालीलपैकी सत्य विधान ओळखा.
(i) $\angle P \cong \angle Q$ (ii) $\angle P < \angle Q$ (iii) $\angle P > \angle Q$.

15. खालील विधानात रिकाम्या जागी योग्य शब्द लिहा.
दोन कोन दिले असता, एकतर ते कोन ········· असतील, किंवा पहिला दुसऱ्यापेक्षा ········· असेल किंवा पहिला दुसऱ्यापेक्षा ········· असेल.
या विधानाने कोनांच्या क्रमसंबंधातील ········· हा गुणधर्म सांगितला आहे.

पारिभाषिक शब्द

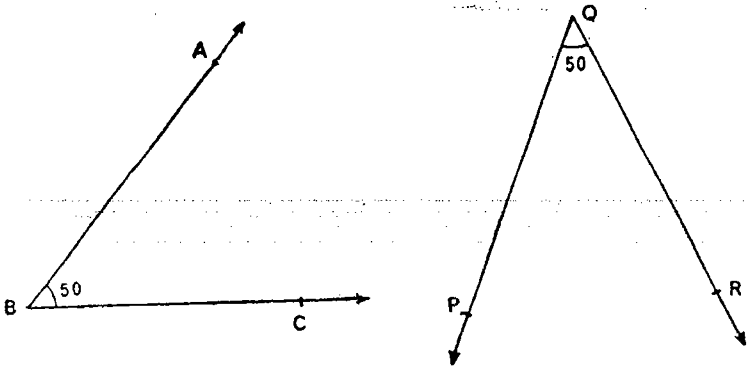
अंतर्भाग – Interior
कोन – Angle
काटकोन – Right Angle
कोटिकोन – Complementary Angles
पूरककोन – Supplementary Angles
लघुकोन – Acute Angle
विशालकोन – Obtuse Angle
विरुद्ध कोन – Vertically Opposite Angles
संलग्नकोन – Adjacent Angles
कोनमापक – Protractor
त्रिकोण – Triangle
समभुज त्रिकोण – Equilateral Triangle
समद्विभुज त्रिकोण – Isosceles Triangle
विषमभुज त्रिकोण – Scalene Triangle
काटकोन त्रिकोण – Right angled Triangle
बहिर्भाग – Exterior
भुजा, बाजू – Side
माप – Measure
मापन – Measurement
रचना – Construction
रेषीय जोडी – Linear Pair
शिरोबिंदू, कोनबिंदू – Vertex

प्रकरण 4

त्रिकोणांतील एकरूपता

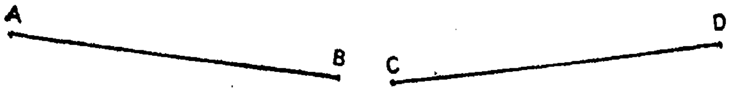
§ 4·1 कोनांची व रेषाखंडांची एकरूपता :

दोन आकृती एकरूप आहेत असे आपण म्हणतो तेव्हा त्याचा काय अर्थ होतो हे तुम्ही यापूर्वी शिकला आहात.



आ. 4·1

दोन कोन एकरूप आहेत असे आपण केव्हा म्हणतो ? बाजूच्या 4·1 आकृतीतील ∠ ABC आणि ∠ PQR यांच्या एकरूपतेविषयी काय सांगता येईल ?

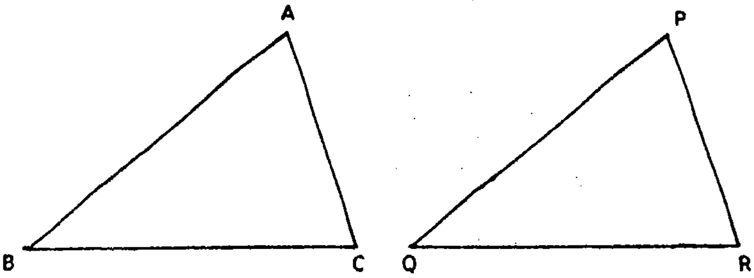


आ. 4·2

दोन रेषाखंड एकरूप आहेत असे आपण केव्हा म्हणतो ? बाजूच्या 4·2 आकृतीतील रेषाखंड एकरूप आहेत की नाही हे तुम्ही कसे पडताळून पाहाल ?

§ 4·2 त्रिकोणांतील एकरूपता :

दोन त्रिकोण एकरूप आहेत म्हणजे काय हे तुम्हाला स्थूल मानाने माहीत आहे. आता याचा विचार आपण अधिक बारकाईने करू.



आ. 4·3

एका कार्डबोर्डवर बाजूच्या आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे दोन त्रिकोण काढा.

आता कार्डबोर्डमधून हे दोन त्रिकोणी तुकडे कापा. हे दोन तुकडे एकमेकांशी तंतोतंत जुळतील असे ठेवा.

समजा, आपण ABC हा तुकडा PQR या तुकड्यावर अशा रीतीने ठेवला की बिंदू A, बिंदू Q शी जुळेल. या स्थितीत दोन त्रिकोण एकमेकांशी तंतोतंत जुळणे अशक्य आहे हे आपल्या लक्षात येईल. या उलट जर आपण बिंदू A, बिंदू P वर ठेवला व बाजू AB, बाजू PQ वर ठेवली तर बिंदू B, बिंदू Q वर आणि बिंदू C, बिंदू R वर येतील व दोन्ही त्रिकोण एकमेकांशी तंतोतंत जुळतील. अर्थात दोन त्रिकोण एकमेकांशी जुळवताना एका त्रिकोणाचे शिरोबिंदू दुसऱ्या त्रिकोणाच्या कोणत्या शिरोबिंदूशी आपण जुळवतो याला फार महत्त्व आहे. एका त्रिकोणाच्या तीन शिरोबिंदूंची दुसऱ्या त्रिकोणाच्या तीन शिरोबिंदूशी एक विशिष्ट एकास-एक संगती लावली तरच हे त्रिकोण तंतोतंत जुळतात व या स्थितीत त्रिकोण एकरूप आहेत असे आपण म्हणतो.

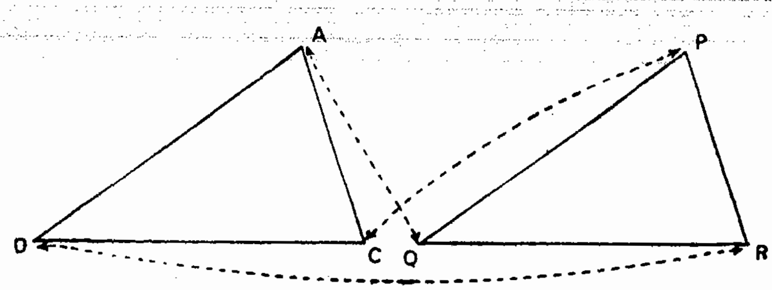
$\triangle$ ABC आणि $\triangle$ PQR यांच्या शिरोबिंदूंमध्ये एकूण सहा एकास-एक संगती संभवतात. अशा एकास एक संगतींतील A व P यांच्यातील संगती $A \longleftrightarrow P$ ने दाखवतात. सहा एकास-एक संगतीपैकी दोन एकास-एक संगती खाली दिल्या आहेत.

(1) $A \longleftrightarrow P$, $B \longleftrightarrow Q$, $C \longleftrightarrow R$

(2) $A \longleftrightarrow P$, $B \longleftrightarrow R$, $C \longleftrightarrow Q$

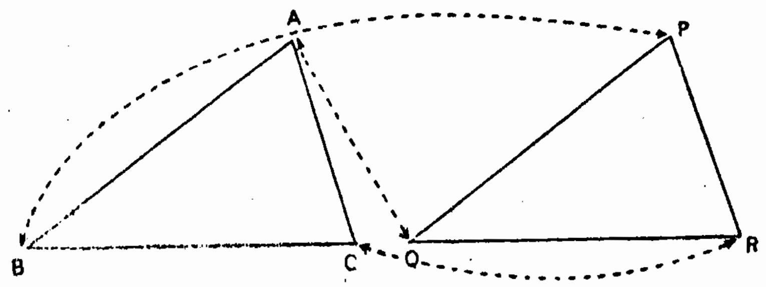
आणखी दोन एकास-एक संगती खाली आकृतींच्या साहाय्याने दाखवल्या आहेत.

(3)



आ. 4·4

(4)



आ. 4·5

आ. 4.4 आणि आ. 4·5 मध्ये दाखवलेल्या एकास-एक संगती (1) व (2) मध्ये दाखवल्याप्रमाणे चिन्हांच्या साहाय्याने दाखवा. उरलेल्या एकास-एक संगती चिन्हांच्या साहाय्याने लिहा. या एकास-एक संगती आकृती काढूनही दाखवा.

पृष्ठ 63 वर (1) मध्ये दिलेली एकास-एक संगती योडक्यात ABC $\longleftrightarrow$ PQR अशी दाखवतात.

ABC $\longleftrightarrow$ PQR असे जेव्हा आपण लिहितो तेव्हा A $\longleftrightarrow$ P, B $\longleftrightarrow$ Q आणि C $\longleftrightarrow$ R असाच अर्थ होत असल्यामुळे ABC $\longleftrightarrow$ PQR या चिन्हांत A, B, C आणि P, Q, R यांच्या क्रमाला फार महत्त्व आहे. त्यांचा क्रम बदलला तर त्याचा अर्थ वेगळा होतो.

दोन त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूंतील एकास-एक संगतीमुळे त्या त्रिकोणांच्या बाजूंमधील तसेच कोनांतीलही एकास-एक संगती मिळते.

ABC $\longleftrightarrow$ PQR म्हणजे A $\longleftrightarrow$ P, B $\longleftrightarrow$ Q आणि C $\longleftrightarrow$ R होय. या स्थितीत $\triangle$ ABC च्या A या शिरोबिंदूसमोरील बाजू BC व $\triangle$ PQR मधील **संगत शिरोबिंदू** P समोरील बाजू QR या **संगत बाजू** होत. तसेच बाजू CA व बाजू RP आणि बाजू AB व बाजू PQ या संगत बाजू होत.

A $\longleftrightarrow$ P म्हणून $\triangle$ ABC चा $\angle$ A आणि $\triangle$ PQR चा $\angle$ P हे संगत कोन होत. तसेच $\angle$ B व $\angle$ Q आणि $\angle$ C व $\angle$ R हे संगत कोन होत.

ABC $\longleftrightarrow$ PQR या एकास-एक संगतीमुळे बाजूंची व कोनांची जी संगती साधली जाते ती खाली दिली आहे.

(1) जर ABC $\longleftrightarrow$ PQR

तर बाजू BC $\longleftrightarrow$ बाजू QR	$\angle$ BAC $\longleftrightarrow$ $\angle$ QPR
बाजू CA $\longleftrightarrow$ बाजू RP	$\angle$ ABC $\longleftrightarrow$ $\angle$ PQR
बाजू AB $\longleftrightarrow$ बाजू PQ	$\angle$ BCA $\longleftrightarrow$ $\angle$ QRP

$\triangle$ ABC आणि $\triangle$ PQR यांच्या शिरोबिंदूंतील आणखी एका एकास-एक संगतीमुळे या त्रिकोणांच्या बाजूंमध्ये तसेच कोनांमध्ये कोणती संगती साधली जाते हे खाली दिले आहे.

(2) जर ABC $\longleftrightarrow$ PRQ

तर बाजू BC $\longleftrightarrow$ बाजू RQ	$\angle$ BAC $\longleftrightarrow$ $\angle$ RPQ
बाजू CA $\longleftrightarrow$ बाजू QP	$\angle$ ABC $\longleftrightarrow$ $\angle$ PRQ
बाजू AB $\longleftrightarrow$ बाजू PR	$\angle$ BCA $\longleftrightarrow$ $\angle$ RQP

आता रिकाम्या जागा, योग्य चिन्ह व अक्षरांनी भरून खालील विधाने पूर्ण करा.

(3) जर ABC $\longleftrightarrow$ QRP

तर बाजू BC $\longleftrightarrow$	$\angle$ BAC $\longleftrightarrow$ ......
बाजू CA $\longleftrightarrow$	$\angle$ ABC $\longleftrightarrow$ $\angle$ QRP
बाजू AB $\longleftrightarrow$ बाजू QR	$\angle$ BCA $\longleftrightarrow$ ......

(4) जर ABC $\longleftrightarrow$ QPR

तर बाजू BC $\longleftrightarrow$ बाजू PR	$\angle$ BAC $\longleftrightarrow$ $\angle$ PQR
बाजू CA $\longleftrightarrow$	$\angle$ ABC $\longleftrightarrow$ ......
बाजू AB $\longleftrightarrow$	$\angle$ BCA $\longleftrightarrow$ ......

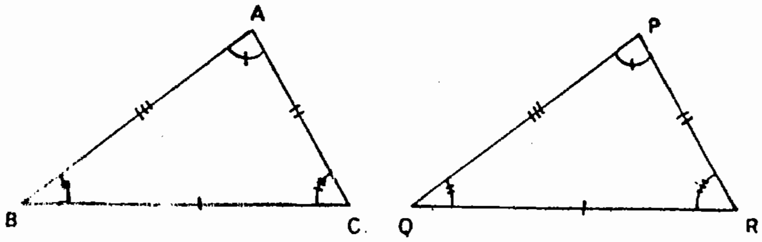
(5) जर ABC $\longleftrightarrow$ RPQ

तर ...... $\longleftrightarrow$ बाजू PQ	$\angle$ ABC $\longleftrightarrow$ ......
...... $\longleftrightarrow$ बाजू QR	...... $\longleftrightarrow$ $\angle$ RPQ
बाजू AB $\longleftrightarrow$	...... $\longleftrightarrow$ $\angle$ PQR

(6) जर ABC ⟷ RQP

तर ...... ⟷ बाजू QP	∠ BAC ⟷ ......
बाजू CA ⟷	...... ⟷ ∠ RQP
...... ⟷ बाजू RQ	∠ BCA ⟷ ......

दोन त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूतील एकास-एक संगती दिली असता संगत बाजू व संगत कोन म्हणजे काय हे आता तुमच्या लक्षात आले असेल.



आ. 4·6

आ. 4·6 मध्ये दोन त्रिकोणांतील एकरूप बाजू व एकरूप कोन सारख्या चिन्हांनी दाखवले आहेत. असे दोन त्रिकोण कागदावर काढून ते त्रिकोणी तुकडे कापा. आता ABC ⟷ PQR ही एकास-एक संगती साधली जाईल, अशा रीतीने त्रिकोण एकमेकांवर ठेवून पाहा. काय आढळते? या त्रिकोणांत संगत बाजू तसेच संगत कोन यांच्यामध्ये कोणता संबंध आहे?

यावरून आपण त्रिकोणांतील एकरूपतेची व्याख्या करू.

व्याख्या : दोन त्रिकोणांतील शिरोबिंदूंमध्ये एकास-एक संगती अशी असेल की संगत बाजूंची प्रत्येक जोडी एकरूप असेल आणि संगत कोनांची प्रत्येक जोडी एकरूप असेल तर ती एकास-एक संगती एकरूपता असते.

जर दोन त्रिकोणांतील शिरोबिंदूंमधील एखादी एकास-एक संगती एकरूपता असेल तर ते दोन **त्रिकोण एकरूप** आहेत असे म्हणतात.

△ ABC व △ PQR यांच्या शिरोबिंदूंतील ABC ⟷ PQR ही संगती एकरूपता असेल तर △ ABC ≅ △ PQR असे आपण लिहितो व त्या त्रिकोणांना एकरूप त्रिकोण म्हणतो.

△ LMN ≅ △ RST चा अर्थ

LMN ⟷ RST ही संगती एकरूपता आहे असा होतो.

△ ABC ≅ △ PQR, यावरून आपणास खालील गोष्टी कळतात.

(1) बाजू BC ≅ बाजू QR	म्हणजेच	$l(BC) = l(QR)$
(2) बाजू CA ≅ बाजू RP	,,	$l(CA) = l(RP)$
(3) बाजू AB ≅ बाजू PQ	,,	$l(AB) = l(PQ)$
(4) ∠ A ≅ ∠ P	,,	$m\angle A = m\angle P$
(5) ∠ B ≅ ∠ Q	,,	$m\angle B = m\angle Q$
(6) ∠ C ≅ ∠ R	,,	$m\angle C = m\angle R$

§ 4·3 एकरूपतेचे गुणधर्म :

आता एकरूपतेचे खालील गुणधर्म लक्षात घ्या.

(1) प्रत्येक त्रिकोण स्वतःशी एकरूप असतो.

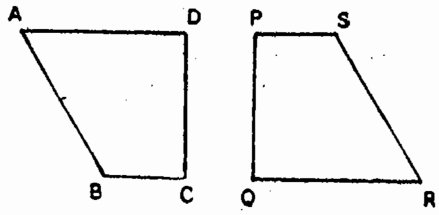
$\triangle ABC \cong \triangle ABC$.

(2) जर $\triangle ABC \cong \triangle PQR$; तर $\triangle PQR \cong \triangle ABC$.

(3) जर $\triangle ABC \cong \triangle PQR$ आणि $\triangle PQR \cong \triangle LMN$; तर $\triangle ABC \cong LMN$.

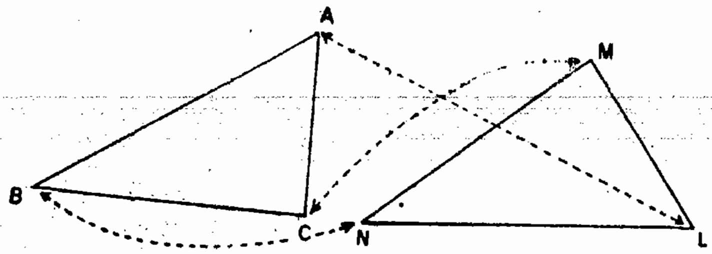
§ 4·4 प्रश्न :

1. सोबतच्या दोन आकृतींच्या शिरोबिंदूत कोणती एकास-एक संगती घेतली असता त्या आकृती एकमेकींशी तंतोतंत जुळवता येतील ?



आ. 4·7

2. $\triangle ABC$ आणि $\triangle LMN$ यांच्या शिरोबिंदूंतील एकास-एक संगती खालील आकृतीत दाखवली आहे. ही संगती चिन्हांच्या साहाय्याने लिहा.



आ. 4·8

3. $PQR \longleftrightarrow LMN$, तर खालील रिकाम्या जागा योग्य अक्षरे लिहून भरा.

$\ldots \longleftrightarrow L$

$R \longleftrightarrow \ldots$

$Q \longleftrightarrow \ldots$

4. $\triangle ABC$ आणि $\triangle RST$ मध्ये, $ABC \longleftrightarrow STR$ असेल तर संगत बाजूंच्या व संगत कोनांच्या सर्व जोडया सांगा.

5. रिकाम्या जागा योग्य रीतीने भरून विधाने पूर्ण करा.

(a) दोन त्रिकोणांतील शिरोबिंदूंमध्ये एकास-एक संगती अशी असेल की······बाजूंची प्रत्येक जोडी आणि संगत कोनांची प्रत्येक जोडी······असेल तर ती संगती एकरूपता असते.

(b) $\triangle LPQ \cong \triangle DEF$; तर

$\ldots\ldots\ldots \cong \triangle LPQ$.

(c) $\triangle ABC \cong \triangle LMN$ आणि $\triangle LMN \cong \triangle RST$; तर

$\triangle ABC \cong \ldots\ldots\ldots$

§ 4·5 त्रिकोणांतील एकरूपतेची गृहीतके :

दोन त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूंमधील एकास-एक संगतीला आपण त्या त्रिकोणांतील एकास-एक संगती म्हणू.

जर दोन त्रिकोणांतील एकास-एक संगती अशी असेल की, एका त्रिकोणाच्या तीनही बाजू दुसऱ्या त्रिकोणाच्या तीनही संगत बाजूंशी एकरूप असतील आणि एका त्रिकोणाचे तीनही कोन दुसऱ्या त्रिकोणाच्या तीनही संगत कोनांशी एकरूप असतील तर ते दोन त्रिकोण एकरूप आहेत असे आपण म्हणतो.

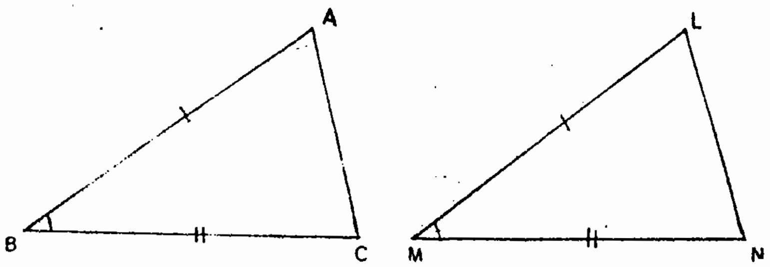
पण दिलेले त्रिकोण एकरूप आहेत हे प्रस्थापित करण्यासाठी त्यांच्या सर्व संगत बाजू व सर्व संगत कोन अनुक्रमे एकरूप आहेत असे माहीत असणे जरूर आहे काय ? दिलेल्या दोन त्रिकोणांच्या बाबतीत किमान किती व कोणत्या गोष्टी कळल्या असता ते दोन त्रिकोण एकरूप आहेत असे आपणास सांगता येईल ?

§ 4·6 बाकोबा गृहीतक :

दोन त्रिकोणांतील एकरूपता ठरवण्यासाठी त्या दोन त्रिकोणांतील सर्व संगत बाजू आणि सर्व संगत कोन एकमेकांशी एकरूप आहेत हे माहीत असणे आवश्यक नाही. एका त्रिकोणाच्या बाजू-कोन-बाजू दुसऱ्या त्रिकोणातील संगत बाजू-कोन-बाजू यांच्याशी एकरूप आहेत इतकेच जरी माहीत असेल तरी ते दोन त्रिकोण एकरूप आहेत असे आपण म्हणू शकतो. हेच खालील गृहीतकात मांडले आहे. या गृहीतकास बाजू-कोन-बाजू गृहीतक किंवा थोडक्यात **बाकोबा** गृहीतक म्हणतात.

गृहीतक 14 : बाकोबा गृहीतक

दोन त्रिकोणांमधील एकास-एक संगती अशी असेल की एका त्रिकोणाच्या दोन बाजू आणि त्यांमधील कोन हे दुसऱ्या त्रिकोणाच्या दोन संगत बाजू आणि त्यांमधील कोन यांच्याशी अनुक्रमे एकरूप असतील, तर ती एकास-एक संगती एकरूपता असते.



आ. 4·9

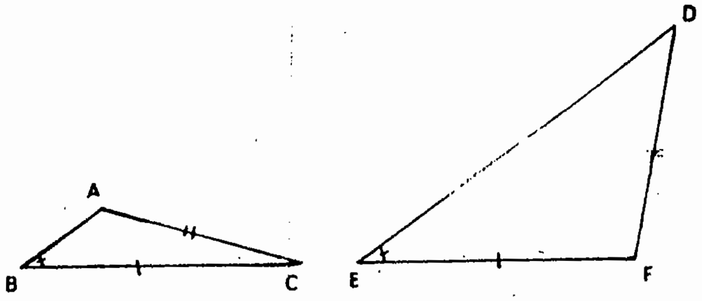
आकृती 4·9 मध्ये ABC ⟷ LMN अशी संगती दिली असता बाजू $AB \cong$ बाजू LM, $\angle B \cong \angle M$ आणि बाजू $BC \cong$ बाजू MN

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle LMN$$

दिलेले दोन त्रिकोण बाकोबा गृहीतकानुसार एकरूप आहेत असे म्हणता येण्यासाठी दिलेल्या संगतीतील कोन हा दिलेल्या एकरूप बाजूंमधील कोनच असला पाहिजे हे लक्षात घेणे जरूर आहे.

दोन त्रिकोणांतील एकास-एक संगती अशी दिली असेल की एका त्रिकोणाच्या दोन बाजू दुसऱ्या त्रिकोणाच्या दोन बाजूंशी अनुक्रमे एकरूप आहेत आणि एका त्रिकोणाचा कोणताही एक कोन दुसऱ्या त्रिकोणाच्या कोणत्याही एका कोनाशी एकरूप आहे; तर ती संगती एकरूपता असेलच असे नाही.

पुढील पृष्ठावरील आकृती पाहा.



आ. 4·10

येथे बाजू BC ≅ बाजू EF, बाजू CA ≅ बाजू FD आणि ∠B ≅ ∠E.

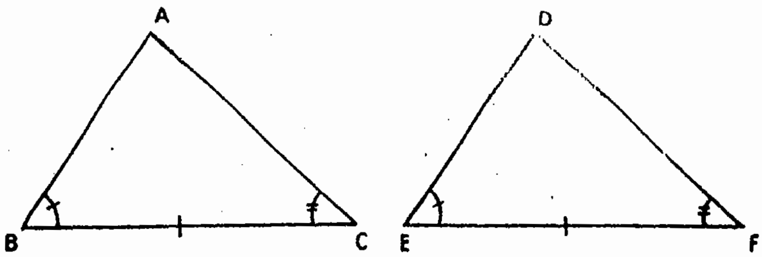
∠B आणि ∠E हे एकरूप बाजूंच्या जोडीमधील कोन नाहीत. या स्थितीत ABC ⟷ DEF ही संगती एकरूपता असेलच असे नाही.

§ 4·7 **कोबाको गृहीतक :**

एक त्रिकोणाच्या कोन-बाजू-कोन दुसऱ्या त्रिकोणातील संगत कोन-बाजू-कोन यांच्याशी एकरूप आहेत, इतकेच जरी माहीत असेल तरी ते दोन त्रिकोण एकरूप आहेत असे आपण म्हणू शकतो. हेच खालील गृहीतकात मांडले आहे. या गृहीतकास कोन-बाजू-कोन गृहीतक किंवा थोडक्यात **कोबाको** गृहीतक म्हणतात.

गृहीतक 15 : कोबाको गृहीतक

दोन त्रिकोणांतील एकास-एक संगती अशी असेल की, एका त्रिकोणाचे दोन कोन आणि त्यांमधील बाजू हे अनुक्रमे दुसऱ्या त्रिकोणाचे दोन संगत कोन आणि त्यांमधील बाजू यांच्याशी एकरूप असतील, तर ती एकास-एक संगती एकरूपता असते.



आ. 4·11

आकृती 4·11 मध्ये ABC ⟷ DEF अशी संगती दिली असता

∠B ≅ ∠E, बाजू BC ≅ बाजू EF आणि ∠C ≅ ∠F

∴ △ABC ≅ △DEF.

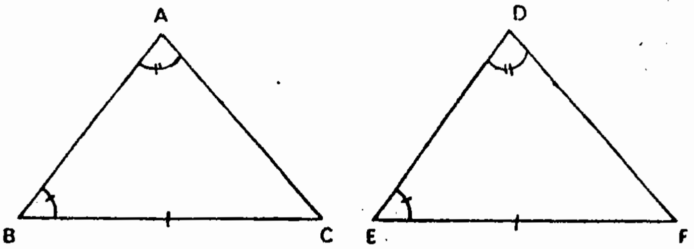
§ 4·8 **बाकोको गृहीतक :**

एका त्रिकोणाचे दोन कोन आणि त्यांमधील बाजू व दुसऱ्या त्रिकोणाचे दोन संगत कोन आणि त्यांमधील बाजू ही एकास-एक संगती घेण्याऐवजी एका त्रिकोणाचे कोणतेही दोन कोन आणि त्यांपैकी एकाची संमुख भुजा हे दुसऱ्या त्रिकोणाचे दोन संगत कोन आणि संगतभुजा ही एकास एक संगती घेतली तर काय होते ते पाहू.

एका त्रिकोणाचे बाजू-कोन-कोन दुसऱ्या त्रिकोणाच्या संगत बाजू-कोन-कोन यांच्याशी एकरूप असतील तर ते दोन त्रिकोण एकरूप आहेत असे आपणास म्हणता येते. हेच आपण गृहीतकाच्या स्वरूपात मांडू. या गृहीतकास बाजू-कोन-कोन गृहीतक किंवा थोडक्यात **बाकोको** गृहीतक म्हणू.

गृहीतक 16 : बाकोको गृहीतक

दोन त्रिकोणांतील एकास-एक संगती अशी असेल की एका त्रिकोणाचे कोणतेही दोन कोन आणि त्यांपैकी एकाची संमुख भुजा हे दुसऱ्या त्रिकोणाचे दोन संगत कोन आणि संमुख भुजा यांच्याशी अनुक्रमे एकरूप असतील, तर ती एकास-एक संगती एकरूपता असते.



आ. 4·12

आ. 4·12 मध्ये ABC $\longleftrightarrow$ DEF ही संगती दिली असता

बाजू BC $\cong$ बाजू EF, $\angle B \cong \angle E$ आणि $\angle A \cong \angle D$

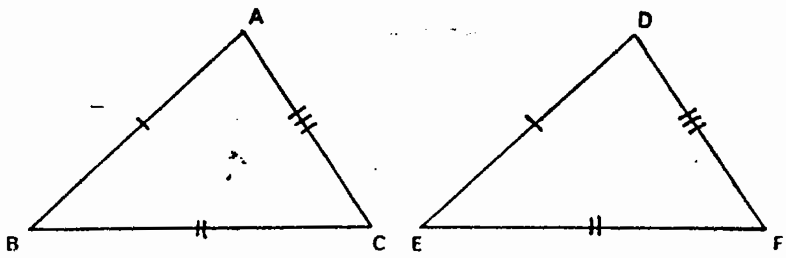
$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF$.

§ 4·9 बाबाबा गृहीतक :

एका त्रिकोणाच्या तीन बाजू दुसऱ्या त्रिकोणाच्या तीन संगत बाजूंशी अनुक्रमे एकरूप आहेत एवढेच माहीत असेल तर ते दोन त्रिकोण एकरूप आहेत असे आपणास म्हणता येते. हेच खालील गृहीतकात मांडले आहे. या गृहीतकास बाजू-बाजू-बाजू गृहीतक किंवा थोडक्यात **बाबाबा** गृहीतक म्हणतात.

गृहीतक 17 : बाबाबा गृहीतक

दोन त्रिकोणांतील एकास-एक संगती अशी असेल की एका त्रिकोणाच्या तीन बाजू, दुसऱ्या त्रिकोणाच्या तीन संगत बाजूंशी अनुक्रमे एकरूप असतील; तर ती एकास-एक संगती एकरूपता असते.



आ. 4·13

आ. 4·13 मध्ये ABC $\longleftrightarrow$ DEF अशी संगती दिली असता

बाजू BC $\cong$ बाजू EF, बाजू CA $\cong$ बाजू FD आणि बाजू AB $\cong$ बाजू DE

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF$.

त्रिकोणांतील एकरूपतेची जी गृहीतके आपण अभ्यासली त्यांचा अनेक प्रमेयांच्या व प्रश्नांच्या सिद्धतेत उपयोग होतो. म्हणून ही सर्व गृहीतके फार महत्त्वाची आहेत. त्यांच्यातील आशय समजून घ्या व तो चांगला लक्षात ठेवा.

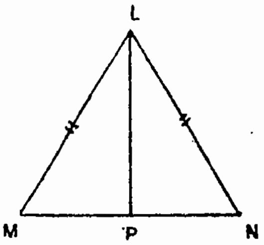
दोन त्रिकोणांच्या एकरूपतेचा विचार करत असता एकरूप दाखवायचे दोन त्रिकोण हे एकाच प्रतलात असले पाहिजेत असे नाही. अवकाशातील कोणत्याही दोन त्रिकोणांच्या संगत बाजू व कोन एकरूप असतील तरीही ते त्रिकोण एकरूप ठरतात. खरे म्हणजे एकरूप दाखवायचे त्रिकोण अवकाशात कोठे आहेत याचा विचार करायचे कारण नाही. म्हणजेच ते एका प्रतलात आहेत की नाहीत यावर त्यांची एकरूपता अवलंबून नसते, तर त्यांच्या संगत बाजू आणि कोन हे एकरूप आहेत की नाहीत यावर ती अवलंबून असते.

§ 4·10 प्रश्न :

1. खालील विधानांतील रिकाम्या जागी योग्य शब्द किंवा अक्षरे लिहून विधाने पूर्ण करा.
   (a) रेख AB ≅ रेख CD तर $l(AB)=$...........
   (b) दोन कोनांची·········सारखी असतील तर ते दोन कोन एकरूप असतात.
   (c) प्रत्येक त्रिकोण······एकरूप असतो.

2. △ ABC ≅ △ DEF, तर खालील रिकाम्या जागी योग्य शब्द किंवा अक्षरे लिहून विधाने पूर्ण करा.
   (a) ABC ⟷ D...F ही संगती एकरूपता आहे.
   (b) बाजू AB ≅ ......
   (c) ...... ≅ बाजू DF
   (d) बाजू BC ≅ ......
   (e) ∠ C ≅ ......
   (f) ......≅ ∠ D
   (g) ∠ B ≅ ......

3. खालील आकृतीत,



आ. 4·14

△ LMP ≅ △ LNP, तर या त्रिकोणांचे शिरोबिंदू, बाजू आणि कोन यांच्यातील संगती खालील रिकाम्या जागी योग्य अक्षरे लिहून दाखवा.

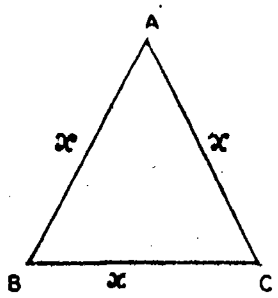
शिरोबिंदू	बाजू	कोन
⟷...	...⟷ रेख PN	∠ MLP ⟷...
M ⟷...	...⟷ रेख LP	∠ LMP ⟷...
P ⟷...	रेख LM ⟷...	... ⟷ ∠ LPN

4. △ ABC ≅ △ PQR, तर या त्रिकोणांच्या कोणत्या सहा संगत भागांच्या जोड्या एकरूप आहेत हे लिहा. (जरूर तर आकृती काढा.)

5. △ LMN ≅ △ ABF, तर या त्रिकोणांच्या कोणत्या सहा संगत भागांच्या जोड्या एकरूप आहेत हे आकृती न काढता लिहा.

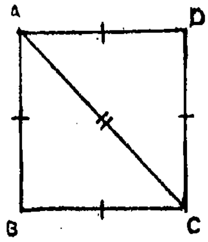
6. △ ABC ≅ △ DEF; तर खालील विधानांपैकी कोणती बरोबर व कोणती चूक आहेत ?
   (a) बाजू AB ≅ बाजू DE
   (b) ∠ B ≅ ∠ D
   (c) ∠ F ≅ ∠ A
   (d) ∠ C ≅ ∠ F
   (e) बाजू BC ≅ बाजू DE
   (f) बाजू DF ≅ बाजू AC

7. बाजूच्या 4·15 या आकृतीत ABC ⟷ BCA ही एकास-एक संगती एकरूप आहे. अशा आणखी किती एकास-एक संगती लिहिता येतील? त्या सर्व लिहा.

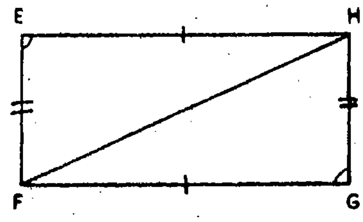


आ. 4·15

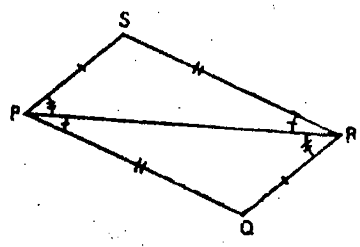
8. खालील 4·16 ते 4·18 या आकृतींत त्रिकोणांच्या एकरूप भागांवर सारख्या खुणा केल्या आहेत. त्यांपैकी कोणते त्रिकोण एकरूप आहेत? कोणत्या एकास-एक संगतीनुसार? कोणत्या गृहीतकाच्या आधारे ते एकरूप आहेत असे सांगता येते?



आ. 4·16



आ. 4·17



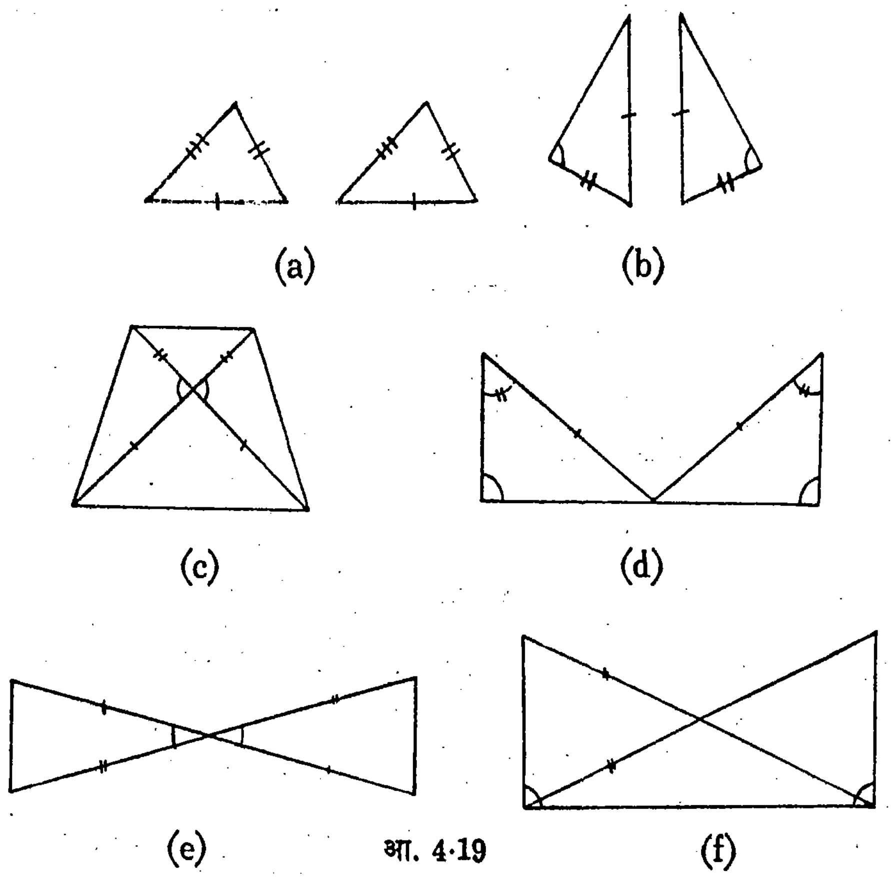
आ. 4·18

8. खालील आकृतीत त्रिकोणाच्या एकरूप भागांवर सारख्या खुणा केल्या आहेत.

(a) दिलेल्या माहितीवरून कोणते त्रिकोण एकरूप आहेत असे आपणास म्हणता येईल?

(b) जे त्रिकोण एकरूप आहेत असे तुम्ही म्हटले त्याला कोणत्या गृहीतकांचा आधार दिला?

(c) कोणते त्रिकोण एकरूप नाहीत असे आपणास सांगता येईल?



आ. 4·19

10. $\triangle PQR$ आणि $\triangle MNP$ मध्ये

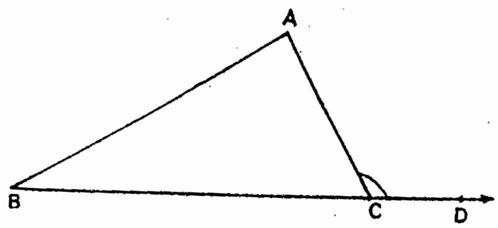
$\angle P \cong \angle M$, बाजू $PQ \cong$ बाजू MP आणि बाजू $PR \cong$ बाजू MN

तर एकरूपकता असणारी एकास-एक संगती लिहा.

§ 4·11 त्रिकोणाचे बाह्यकोन :

$\triangle ABC$ मध्ये $\angle BAC$, $\angle ABC$ आणि $\angle BCA$ यांना त्या त्रिकोणाचे कोन म्हणतात.

खालील आकृतीत दाखवलेल्या $\angle ACD$ ला $\triangle ABC$ चा **बाह्यकोन** म्हणतात.

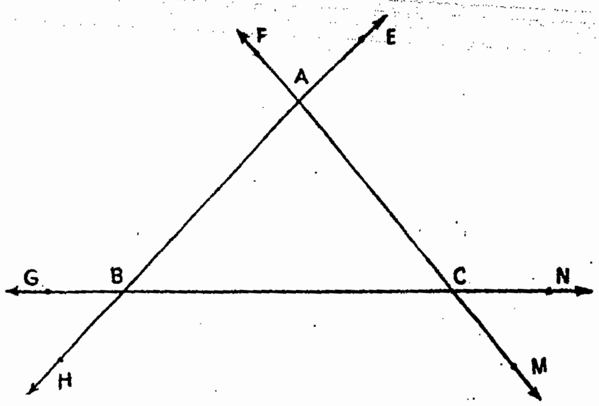


आ. 4·20

या आकृतीत $\triangle ABC$ चा $\angle ACB$ हा, बाह्यकोन $\angle ACD$ चा संलग्न कोन आहे. $\triangle ABC$ चे कोन $\angle BAC$ आणि $\angle ABC$ पैकी, प्रत्येकास बाह्यकोन $\angle ACD$ च्या संदर्भात आपण असंलग्न कोन म्हणू.

बाह्यकोन $\angle ACD$ आणि त्रिकोणाचा कोन $\angle ACB$ या कोनांची जोडी लक्षात घ्या. कोनांच्या अशा जोडीला आपण कोणती जोडी म्हणतो ? यावरून त्रिकोणाच्या बाह्यकोनाची व्याख्या कशी करता येईल.

व्याख्या : त्रिकोणाच्या कोणत्याही कोनाशी रेषीय जोडी तयार करणाऱ्या कोनास **त्रिकोणाचा बाह्यकोन** म्हणतात.



आ. 4·21

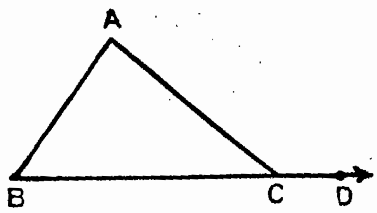
कोणताही त्रिकोण घेतला तर त्याचे एकूण किती बाह्यकोन होतील ?

$\triangle ABC$ च्या सर्व बाह्यकोनांची नावे सांगा.

$\angle FAE$, $\angle GBH$ आणि $\angle MCN$ यांपैकी कोणताही कोन $\triangle ABC$ चा बाह्यकोन नाही. (कारण सांगा.)

§ 4·12 ■ प्रमेय :

त्रिकोणाचा बाह्यकोन हा प्रत्येक असंलग्न आंतरकोनापेक्षा मोठा असतो.



आ. 4·22

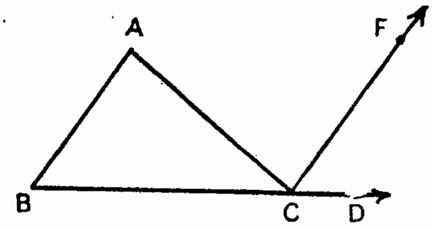
त्रिकोणांतील एकरूपतेची गृहीतके लक्षात घ्या. त्यांपैकी एका गृहीतकाचा उपयोग वरील प्रमेयाच्या सिद्धतेसाठी करायचा आहे. कोणते गृहीतक वापरता येईल ?

प्रमेयावरून आपणास बाजूला दाखवलेली आकृती मिळते.

$\angle ACD > \angle BAC$ हे आपणांस सिद्ध करायचे आहे.

बाह्यकोन $\angle ACD$ च्या अंतर्भागात F हा बिंदू घेतला, तर कोनाच्या बेरजेच्या गृहीतकानुसार

$m\angle ACD = m\angle ACF + m\angle FCD$. आता $\angle ACF$ किंवा $\angle FCD$ हा $\angle BAC$ च्या मापाएवढा आहे हे दाखवता आले तर $\angle ACD > \angle BAC$ सिद्ध होईल. $\angle ACF$ व $\angle BAC$ एकरूप होतील असा, बाह्यकोन $\angle ACD$ च्या अंतर्भागात असणारा F बिंदू शोधता येईल काय ?



आ. 4·23

एकरूप त्रिकोणातील संगत कोन एकरूप असतात हे आपणांस माहीत आहे. $\angle BAC$ आणि $\angle ACF$ हे एकरूप त्रिकोणांचे संगत कोन होतील असे त्रिकोण कसे मिळवता येतील ?

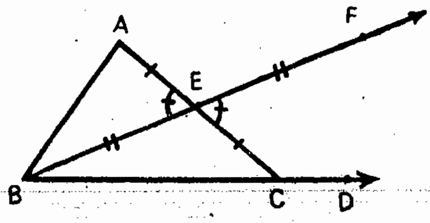
बाजू AC चा मध्यबिंदू E घेतला तर

बाजू $AE \cong$ बाजू EC मिळेल.

किरण EB च्या विरुद्ध किरणावर F बिंदू घेतला तर

$\angle AEB \cong \angle FEC$ (परस्पर विरुद्ध कोन) मिळतील.

आता त्रिकोणातील एकरूपतेच्या गृहीतकांपैकी कोणत्या गृहीतकाचा उपयोग करणे सोयीचे होईल ? त्यासाठी बाजू EB आणि बाजू EF यांच्या लांबीत काय संबंध असावा लागेल ?



आ. 4·24

यावरून, प्रमेय सिद्ध करण्यासाठी कोणती रचना करावी लागते हे आपल्या लक्षात येते.

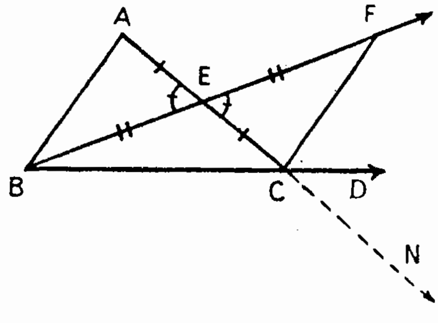
आता खालील सिद्धता अभ्यासा.

प्रमेय :

त्रिकोणाचा बाह्यकोन हा प्रत्येक असंलग्न आंतरकोनापेक्षा मोठा असतो.

पक्ष : $\angle ACD$ हा $\triangle ABC$ चा बाह्यकोन आहे.

साध्य : $m\angle ACD > m\angle BAC$ व
$m\angle ACD > m\angle ABC$



आ. 4·25

सिद्धता :

विधाने	कारणे
1. रेख AC चा मध्यबिंदू E घ्या.	
2. किरण EB च्या विरुद्ध किरणावर F हा असा बिंदू आहे की रेख EF $\cong$ रेख EB	
3. $\angle FEC \cong \angle AEB$	परस्पर विरुद्ध कोन
4. $\triangle FEC \cong \triangle BEA$	बाकोबा गृहीतक
5. $\angle ECF \cong \angle BAC$	एकरूप त्रिकोणांचे संगत कोन
6. $m\angle ACD = m\angle ECF + m\angle FCD$	कोनांच्या बेरजेचे गृहीतक
7. $m\angle ACD = m\angle BAC + m\angle FCD$	विधाने 5 व 6 वरून
8. $m\angle ACD > m\angle BAC$	विधान 7 वरून ($m\angle FCD$ ही एक धन संख्या आहे.)
9. रेख BC चा मध्यबिंदू घेऊन याच पद्धतीने $m\angle BCN > m\angle ABC$ हे सिद्ध करता येते.	
10. $m\angle BCN = m\angle ACD$	परस्पर विरुद्ध कोन
11. $m\angle ACD > m\angle ABC$	विधाने 9 व 10 वरून.

याच पद्धतीने इतर बाह्यकोन त्यांच्या असंलग्न आंतरकोनांपेक्षा मोठे असतात हे सिद्ध करता येते.

टीप : वरील सिद्धतेत विधान 6 मांडता येण्यासाठी बिंदू F हा $\angle ACD$ च्या अंतर्भागात आहे हे सिद्ध करणे आवश्यक आहे. ती सिद्धता कठिण असल्यामुळे येथे टाळली आहे.

§ 4·13 काटकोन त्रिकोणाचे कोन :

काटकोन त्रिकोणातील काटकोन सोडून उरलेल्या कोनांपैकी प्रत्येक कोन कोणत्या प्रकारचा असला पाहिजे असे तुम्हांला वाटते ?

बाह्यकोनाच्या वरील प्रमेयावरून हा गुणधर्म सहज लक्षात येतो किंवा त्या प्रमेयाचा उपयोग करून हा गुणधर्म सहज सिद्ध करता येतो.

काटकोन त्रिकोणाचा हा गुणधर्म आपण उपप्रमेयाच्या स्वरूपात मांडू. तुम्ही म्हणाल, "याला उपप्रमेय का म्हणावे ?"

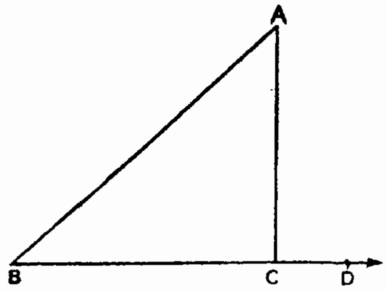
मूळ प्रमेयावरून सहज लक्षात येणाऱ्या किंवा सहज सिद्ध करता येणाऱ्या गुणधर्माला त्या मूळ प्रमेयाचे उपप्रमेय म्हणतात.

उपप्रमेय :

त्रिकोणाचा एक कोन काटकोन असेल तर उरलेले दोन्ही कोन लघुकोन असतात.

त्रिकोणाचा बाह्यकोन हा प्रत्येक असंलग्न आंतर-कोनापेक्षा मोठा असतो, या प्रमेयाचा उपयोग करून वरील उपप्रमेय कसे सिद्ध कराल?

आ. 4·26 प्रमाणे आकृती काढा आणि सिद्धता तुम्ही स्वतः लिहा.



आ. 4·26

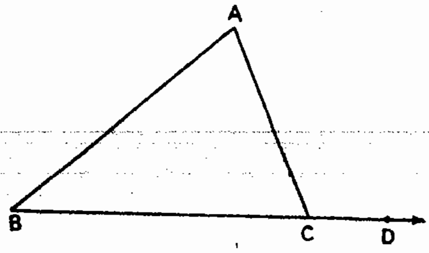
§ 4·14 त्रिकोणाच्या दोन कोनांच्या मापांची बेरीज :

उपप्रमेय :

त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन कोनांच्या मापांची बेरीज 180 पेक्षा कमी असते.

त्रिकोणाच्या बाह्यकोनासंबंधीच्या प्रमेयांचा उपयोग करून हे उपप्रमेय कसे सिद्ध कराल?

सिद्धता लिहून काढा व खाली दिलेल्या सिद्धतेवरून ती पडताळून पाहा.



आ. 4·27

पक्ष : ABC हा एक त्रिकोण आहे.

साध्य : $m\angle BAC + m\angle ACB < 180$

सिद्धता :

विधाने	कारणे
1. $\angle ACD$ हा $\triangle ABC$ चा बाह्यकोन आहे.	
2. $\angle ACD$ व $\angle ACB$ हे पूरक कोन आहेत.	रेषीय जोडीतील कोन
3. $m\angle ACD + m\angle ACB = 180$	
4. $m\angle BAC < m\angle ACD$	त्रिकोणाच्या बाह्यकोनासंबंधीचे प्रमेय
5. $m\angle BAC + m\angle ACD < 180$	विधाने 3 व 4 वरून.

याच पद्धतीने $m\angle B + m\angle C < 180$ आणि $m\angle A + m\angle B < 180$ हे सिद्ध करता येईल.

$m\angle B + m\angle C < 180$ हे याच आकृतीवरून कसे सिद्ध कराल?

$m\angle A + m\angle B < 180$ हे सिद्ध करण्यासाठी कोणता बाह्यकोन घ्याल?

येथे आपणास आणखी एक उपप्रमेय मांडता येईल.

उपप्रमेय :

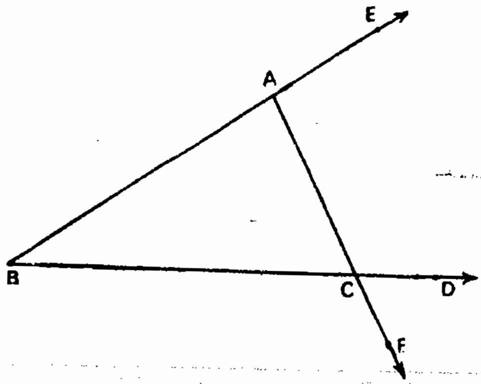
कोणत्याही त्रिकोणात दोन काटकोन असत नाहीत.

या उपप्रमेयाची सिद्‌धता लिहा.

§ 4·15 **प्रश्न :**

1. रिकाम्या जागी योग्य शब्द लिहून विधाने पूर्ण करा.
   (a) त्रिकोणाचा बाह्यकोन······आंतरकोनांपेक्षा मोठा असतो.
   (b) त्रिकोणाचा एक कोन काटकोन असेल तर उरलेले कोन······असतात.
   (c) त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन कोनांच्या मापांची बेरीज······पेक्षा कमी असते.

2. (a) खालील आकृतीतील त्रिकोणाच्या बाह्यकोनांची नावे सांगा.

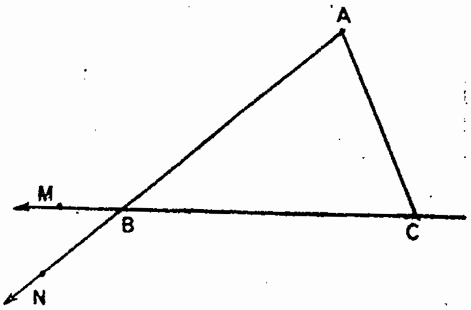


आ. 4·28

(b) बाह्यकोन ∠ BCF चे असंलग्न आंतर-कोन कोणते आहेत?

(c) ∠ ACB व ∠ ABC हे कोणत्या बाह्यकोनांचे असंलग्न आंतरकोन आहेत?

3. (a) खालील आकृतीतील त्रिकोणाचे बाह्यकोन कोणते?



आ. 4·29

(b) m ∠ ABM आणि m ∠ CBN यात काय संबंध आहे? का?

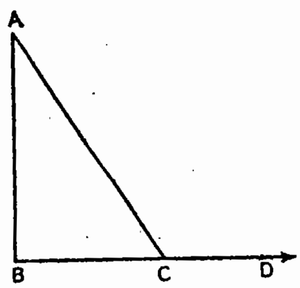
(c) m ∠ ABM आणि m ∠ C यात काय संबंध आहे? का?

(d) m ∠ CBN आणि m ∠ C यात काय संबंध आहे? कशावरून?

4. आ. 4·30 मध्ये m ∠ ABC = 90 तर सिद्‌ध करा की ∠ ACD हा विशालकोन आहे.

5. △ PQR मध्ये m ∠ PQR = 90.
   बाह्यकोन ∠ PRS घेऊन ∠ QPR आणि ∠ PRQ लघुकोन आहेत हे सिद्‌ध करा.

6. △ ABC मध्ये ∠ ACB हा विशालकोन आहे. बाह्यकोन ∠ ACD घेऊन ∠ A व ∠ B लघुकोन आहेत हे सिद्‌ध करा.



आ. 4·30

7. $\triangle$ DEF च्या अंतर्भागात M हा एक बिंदू आहे. सिद्ध करा की $m\angle EMF > m\angle EDF$.

8. $\triangle$ ABC चा बाह्यकोन $\angle$ ACD असेल तर बाह्यकोनाची आपण केलेली व्याख्या वापरून B – C – D हे कसे दाखवाल ?

9. $\triangle$ ABC चा बाह्यकोन $\angle$ ACD आहे. बाजू AC चा मध्यबिंदू E आहे. किरण EB च्या विरुद्ध किरणावर F हा एक बिंदू आहे. सिद्ध करा की, बिंदू F हा $\angle$ ACD च्या अंतर्भागात आहे.

§ 4·16 समद्विभुज त्रिकोण :

ज्या त्रिकोणाच्या दोन बाजू एकरूप असतात त्या त्रिकोणास आपण समद्विभुज त्रिकोण म्हणतो. समद्विभुज त्रिकोणात एकरूप बाजूंखेरीज जी बाजू असते तिला समद्विभुज त्रिकोणाचा पाया म्हणतात. समद्विभुज त्रिकोणातील एकरूप बाजूंसमोरील कोन म्हणजे पायालगतचे कोन होत.

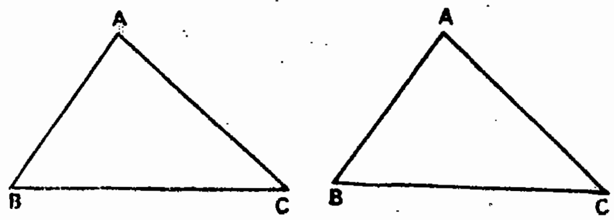
§ 4·17 ■ प्रमेय :

त्रिकोणाच्या दोन बाजू एकरूप असतील तर त्या बाजूंसमोरील कोन एकरूप असतात.

वरील प्रमेय दुसऱ्या शब्दांत पुढीलप्रमाणे मांडता येते. ‘समद्विभुज त्रिकोणाच्या पायालगतचे कोन एकरूप असतात.’

आता हे प्रमेय कसे सिद्ध करावे हे पाहू.

$\triangle$ ABC हा कोणताही त्रिकोण असेल तर ABC $\longleftrightarrow$ ABC ही संगती एकरूपता असतेच.

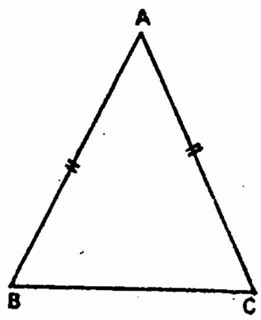


आ. 4·31

पण ABC $\longleftrightarrow$ ACB ही संगती नेहमीच एकरूपता असेल असे नाही. ABC $\longleftrightarrow$ ACB या संगतीमध्ये बाजू AB $\longleftrightarrow$ बाजू AC. या बाजू एकरूप असतीलच असे नाही. परंतु वरील प्रमेयात बाजू AB $\cong$ बाजू AC दिले आहे. त्यामुळे ABC $\longleftrightarrow$ ACB ही संगती एकरूपता असण्याचा संभव निर्माण होतो. तसे प्रत्यक्षात होते का हे पाहू. सोयीसाठी प्रमेय पुन्हा मांडू.

प्रमेय :

त्रिकोणाच्या दोन बाजू एकरूप असतील तर त्या बाजूंसमोरील कोन एकरूप असतात.



आ. 4·32

पक्ष : $\triangle$ ABC मध्ये बाजू AB $\cong$ बाजू AC

साध्य : $\angle B \cong \angle C$

सिद्धता : $\triangle ABC$च्या स्वतःशी एकूण सहा वेगवेगळ्या संगती होतात. ह्या सर्व संगती सामान्यतः एकरूपता असतातच असे नाही. या प्रमेयात आपल्याला बाजू $AB \cong$ बाजू AC हे माहीत आहे. $\angle B \cong \angle C$ हे सिद्ध करायचे आहे. म्हणून $\triangle ABC$ची $\angle B$ आणि $\angle C$ हे संगत कोन होतील अशी संगती निवडल्याने इष्ट ते सिद्ध होईल.

$ABC \longleftrightarrow ACB$ या संगतीवरून संगत बाजूंच्या व संगत कोनांच्या खालील जोडया मिळतात.

बाजू $AB \longleftrightarrow$ बाजू AC $\quad \angle A \longleftrightarrow \angle A$

बाजू $AC \longleftrightarrow$ बाजू AB $\quad \angle B \longleftrightarrow \angle C$

बाजू $BC \longleftrightarrow$ बाजू CB $\quad \angle C \longleftrightarrow \angle B$

पण या सर्व जोडयांतील बाजू एकरूप आहेत.

$\because$ बाबाबा गृहीतकानुसार $ABC \longleftrightarrow ACB$ ही संगती एकरूपता ठरते.

त्यामुळे $\angle B$ आणि $\angle C$ हे संगतकोन एकरूप होतात.

अर्थात $\angle B \cong \angle C$

हेच सिद्ध करायचे होते.

समद्विभुज त्रिकोणाच्या पायालगतचे कोन एकरूप असतात हे कळल्यानंतर समभुज त्रिकोणाचा एक गुणधर्म आपण उपप्रमेयाच्या स्वरूपात मांडू.

उपप्रमेय :

समभुज त्रिकोणाचे सर्व कोन एकरूप असतात.

या उपप्रमेयाची सिद्धता तुम्ही स्वतः दया.

§ 4·18 प्रमेयाचा व्यत्यास :

तुम्ही अभ्यासलेले समद्विभुज त्रिकोणासंबंधीचे प्रमेय परत एकदा वाचा. प्रमेय जर–तर च्या स्वरूपात मांडता येते हे तुम्हांला माहीत आहेच.

समद्विभुज त्रिकोणासंबंधीच्या प्रमेयाचे दोन भाग होतात. पहिल्या भागात त्रिकोणाच्या दोन बाजू एकरूप आहेत हे दिले आहे. दुसऱ्या भागात एकरूप बाजूंसमोरील कोन एकरूप असतात हे सिद्ध करा असे म्हटले आहे. या प्रमेयात जे सिद्ध करा असे म्हटले आहे, ते दिले आहे व जे दिले आहे, ते सिद्ध करा असे म्हटले तर प्रमेयाचे स्वरूप खालीलप्रमाणे होते.

'त्रिकोणाचे दोन कोन एकरूप असतील तर एकरूप कोनांसमोरील बाजू एकरूप असतात.'

याला मूळ प्रमेयाचा **व्यत्यास** म्हणतात. अर्थात एखादया प्रमेयाचा व्यत्यास म्हणजे प्रमेयात दिलेल्या आणि सिद्ध करायच्या बाबींची अदलाबदल करून मांडलेले प्रमेय होय असे सर्वसामान्यपणे म्हणता येते.

समद्विभुज त्रिकोणासंबंधीच्या वरील प्रमेयाचा व्यत्यास सत्य आहे. आपण त्याची सिद्धता पुढे अभ्यासणार आहोत. पण तत्पूर्वी हे लक्षात घेतले पाहिजे की कोणत्याही जर-तरच्या स्वरूपातील विधानाचा व्यत्यास नेहमी सत्य असतोच असे नाही. खालील उदाहरणे पाहा.

उदाहरण	व्यत्यास
1. आज रविवार असेल तर उद्या सोमवार असेल.	1. उद्या सोमवार असेल तर आज रविवार असेल.
2. तुम्ही सांगाल ते काम माझ्या आवाक्यातील असेल तर मी ते करू शकेन.	2. तुम्ही सांगाल ते काम मी करू शकेन तर ते माझ्या आवाक्यातील असेल.
3. त्रिकोणाच्या तीनही बाजू एकरूप असतील तर त्याचे तीनही कोन एकरूप असतात.	3. त्रिकोणाचे तीनही कोन एकरूप असतील तर त्याच्या तीनही बाजू एकरूप अतसात.
4. पाऊस पडत असेल तर आकाशात ढग असतील.	4. आकाशात ढग असतील तर पाऊस पडत असेल.
5. तो दिल्लीत राहत असेल तर तो भारताचा रहिवासी असेल.	5. तो भारताचा रहिवासी असेल तर तो दिल्लीत राहत असेल.
6. एखादी रेषा दिलेल्या रेषाखंडास दुभागत असेल तर ती त्या रेषाखंडास एका बिंदूत छेदते.	6. एखादी रेषा दिलेल्या रेषाखंडास एका बिंदूत छेदत असेल तर ती त्या रेषाखंडास दुभागते.

उदाहरण 1 ते 3 मधील व्यत्यास सत्य आहे. पण उदाहरण 4 ते 6 मधील व्यत्यास नेहमीच सत्य असतील असे नाही.

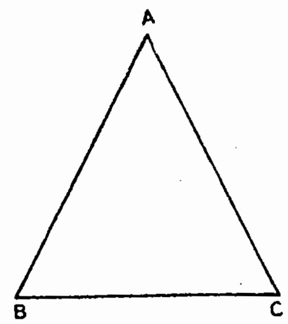
आता आपण समद्विभुज त्रिकोणावरील प्रमेयाच्या व्यत्यासाची सिद्धता पाहू.

§ 4·19 ■ प्रमेय :

त्रिकोणाचे दोन कोन एकरूप असतील तर त्या कोनांसमोरील बाजू एकरूप असतात.

हे प्रमेय, प्रमेय 4·17 चा व्यत्यास आहे.

मूळ प्रमेय ज्या पद्धतीने सिद्ध केले त्याच पद्धतीने हा व्यत्यास कसा सिद्ध कराल? खालील सिद्धता पाहा.



आ. 4·33

पक्ष : $\triangle ABC$ मध्ये $\angle B \cong \angle C$

साध्य : बाजू $AB \cong$ बाजू AC

सिद्धता :

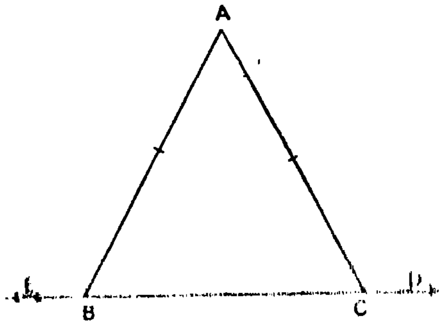
विधाने	कारणे
1. $\angle B \cong \angle C$	पक्ष
2. $\angle C \cong \angle B$	
3. बाजू $BC \cong$ बाजू BC	
4. $\triangle ABC \cong \triangle ACB$	कोबाको गृहीतक
5. बाजू $AB \cong$ बाजू AC	एकरूप त्रिकोणाच्या संगत बाजू

समभुज त्रिकोणाच्या कोनांतील संबंध दाखवणाऱ्या उपप्रमेयाचा व्यत्यास खाली मांडला आहे.

उपप्रमेय :

त्रिकोणाचे तीनही कोन एकरूप असतील तर तो त्रिकोण समभुज असतो.

या उपप्रमेयाची सिद्धता लिहा.



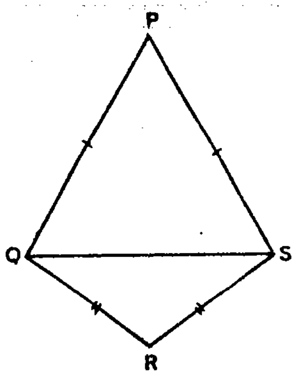
आ. 4·34

§ 4·20 प्रश्न :

1. बाजूस दिलेल्या आकृतीत बाजू A B ≅ बाजू A C तर खालील सिद्धतेतील कारणे लिहून सिद्धता पूर्ण करा.

सिद्धता :

विधाने	कारणे
1. बाजू AB ≅ बाजू AC	....
2. ∠ ACB ≅ ∠ ABC	....
3. ∠ ACD हा ∠ ACB चा पूरक कोन आहे. ∠ ABE हा ∠ ABC चा पूरक कोन आहे.	....
4. ∠ ACD ≅ ∠ ABE	....



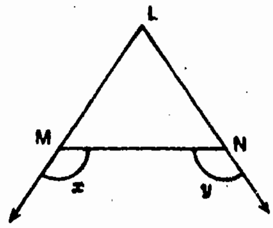
आ. 4·35

2. बाजूला दिलेल्या प्रतलीय आकृतीत l (PQ) = l (PS) आणि l (RQ) = l (RS) तर खालील सिद्धतेतील रिकाम्या जागा भरून सिद्धता पूर्ण करा.

सिद्धता :

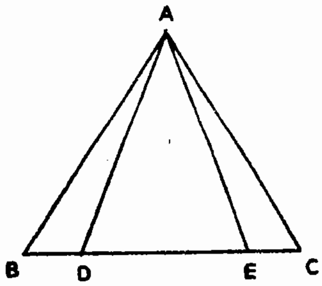
विधाने	कारणे
1. बाजू PQ ≅ बाजू PS	....
2.	समद्विभुज त्रिकोणाच्या पायालगतचे कोन
3.	पक्ष
4. ∠ RQS ≅ ∠ RSQ	....
5. m ∠ PQR = m ∠ PQS + m ∠RQS m ∠ PSR = m ∠ PSQ + m ∠RSQ	कोनांच्या बेरजेचे गृहीतक
6. ∠ PQR ≅ ∠ PSR	....

3. बाजूच्या आकृतीत बाजू LM ≅ बाजू LN तर सिद्ध करा की $\angle x \cong \angle y$



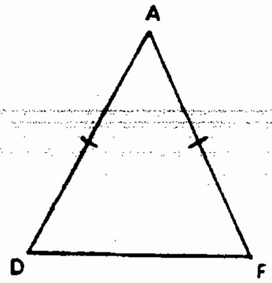
आ. 4·36

4. बाजूस दिलेल्या आकृतीत बाजू AB ≅ बाजू AC आणि बाजू AD ≅ बाजू AE, तर सिद्ध करा की △ ABD ≅ △ ACE



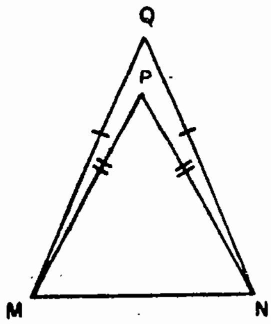
आ. 4·37

5. △ ADF मध्ये बाजू AD ≅ बाजू AF तर सिद्ध करा की △ ADF ≅ △ AFD



आ. 4·38

6. बाजूला दिलेल्या प्रतलीय आकृतीत $l(QM) = l(QN)$ आणि $l(PM) = l(PN)$ तर सिद्ध करा की $\angle QMP \cong \angle QNP$
दिलेली आकृती प्रतलीय नसेल तरीही हे सिद्ध होईल का ?



आ. 4·39

7. समद्विभुज त्रिकोण LMN च्या एकरूप बाजू LM आणि बाजू LN चे मध्यबिंदू अनुक्रमे A व B आहेत. सिद्ध करा की △ LAB हा समद्विभुज त्रिकोण आहे.

8. △ PQR हा समभुज त्रिकोण असून बिंदू A, बिंदू B आणि बिंदू C अनुक्रमे बाजू PQ, बाजू QR आणि बाजू RP चे मध्यबिंदू आहेत. सिद्ध करा की △ ABC हा समभुज त्रिकोण आहे.

9. खालील विधानांचे व्यत्यास लिहा. त्यांपैकी कोणते व्यत्यास नेहमी सत्य असतील ?

(a) पाऊस पडलेला असेल तर अंगण ओले झालेले असेल.

(b) दिलेल्या त्रिकोणाच्या सर्व बाजू एकरूप असतील तर त्याचे सर्व कोन एकरूप असतात.

(c) चौकोनाचे सर्व कोन एकरूप असतील तर प्रत्येक कोन काटकोन असतो.

(d) त्याने पदवी संपादन केली तर त्याला नोकरी मिळेल.

(e) दोन त्रिकोण एकरूप असतील तर त्यांचे संगत कोन एकरूप असतात.

(f) दोन कोनांपैकी प्रत्येक कोन काटकोन असेल तर ते दोन कोन एकरूप असतात.

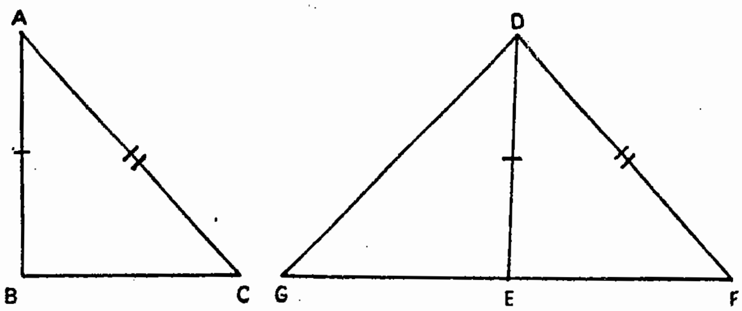
§ 4·21 काटकोन त्रिकोणांची एकरूपता :

दोन त्रिकोण एकरूप आहेत हे बाकोबा गृहीतकाच्या आधारे सांगता येण्यासाठी दिलेला कोन हा दिलेल्या दोन बाजूंमधील कोन असला पाहिजे हे आपण पाहिले आहे. पण दोन काटकोन त्रिकोण एकरूप आहेत हे प्रस्थापित करण्यासाठी त्यांचे कर्ण व कोणतीही एक बाजू एकरूप आहेत एवढे माहीत असणे पुरेसे आहे; या एकरूप बाजूंमधील कोन एकरूप आहेत हे माहीत असण्याची गरज नाही. काटकोन त्रिकोणांतील एकरूपतेचे प्रमेय मांडून ते आपण सिद्ध करू.

§ 4·22 ▪ कर्ण-भुजा प्रमेय :

दोन काटकोन त्रिकोणांतील एकास-एक संगती दिली असता जर एका त्रिकोणाचा कर्ण व एक बाजू अनुक्रमे दुसऱ्या त्रिकोणाचा कर्ण व संगत बाजू यांच्याशी एकरूप असतील तर ती एकास-एक संगती एकरूपता असते.

त्रिकोणांतील एकरूपतेची गृहीतके वापरून वरील प्रमेय कसे सिद्ध करता येईल ?
या पूर्वी तुम्ही शिकलेल्या प्रमेयांपैकी कोणत्या प्रमेयाचा उपयोग करावा लागेल ?
खाली दिलेली सिद्धता अभ्यासा.



आ. 4·40

पक्ष : △ABC आणि △DEF मध्ये
$m\angle ABC = m\angle DEF = 90$
बाजू $AB \cong$ बाजू DE
कर्ण $AC \cong$ बाजू DF

साध्य : $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

सिद्धता : किरण EF च्या विरुद्ध किरणावर बिंदू G असा घ्या की,

l (BC) = l (EG), △ ABC आणि △ DEG मध्ये

ABC ⟷ DEG ही संगती दिली असता

बाजू AB ≅ बाजू DE (पक्ष)

∠ ABC ≅ ∠ DEG (पक्ष)

बाजू BC ≅ बाजू EG (रचना)

बाकोबा गृहीतकानुसार

△ ABC ≅ △ DEG

∴ कर्ण AC ≅ कर्ण DG (एकरूप त्रिकोणाच्या संगत बाजू)

परंतु कर्ण AC ≅ कर्ण DF (पक्ष)

∴ कर्ण DG ≅ कर्ण DF

∴ △ DGF हा समद्विभुज त्रिकोण आहे. (समद्विभुज त्रिकोणाची व्याख्या)

∴ ∠ G = ∠ F (समद्विभुज त्रिकोणाच्या पायालगतचे कोन)

आता △ DEF आणि △ DEG मध्ये

DEF ⟷ DEG ही संगती दिली असता

∠ F ≅ ∠ G (सिद्ध)

कर्ण DF ≅ कर्ण DG (सिद्ध)

∠ DEF ≅ ∠ DEG (काटकोन)

कोकोबा गृहीतकानुसार

△ DEF ≅ △ DEG

(1) व (2) वरून

△ ABC ≅ △ DEF

हेच सिद्ध करायचे होते.

टीप : वरील सिद्धतेमध्ये जे त्रिकोण एकरूप असल्याचे दाखवायचे होते ते प्रत्यक्षपणे एकमेकांशी एकरूप दाखवले नाहीत, तर आपण तिसराच एक त्रिकोण तयार केला व हे दोन त्रिकोण त्याच्याशी एकरूप असल्याचे दाखवले.

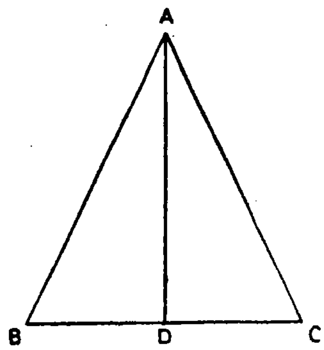
§ 4·23 प्रश्न :

1. दिलेल्या आकृतीत

बाजू AB ≅ बाजू AC

आणि रेख AD ⊥ रेख BC,

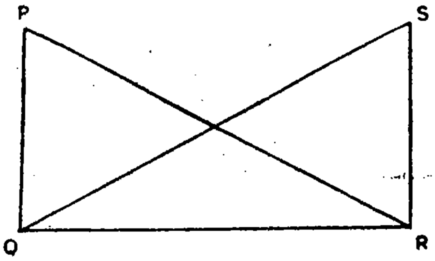
तर पुढील पृष्ठावरील सिद्धतेमधील रिकाम्या जागा भरून सिद्धता पूर्ण करा.



आ. 4·41

सिद्धता :

विधाने	कारणे
1. $m\angle ADB = m\angle ADC = 90$	....
2. $\triangle ABD$ व $\triangle ACD$ हे काटकोन त्रिकोण आहेत.	विधान 1 वरून
3. बाजू AB ≅ बाजू AC	....
4.	विधाने 2 व 3 आणि कर्ण-भुजा प्रमेय
5. रेख BD ≅ रेख DC	....



आ. 4·42

2. बाजूस दिलेल्या आकृतीत
$m\angle PQR = m\angle SRQ = 90$
बाजू PR ≅ बाजू SQ,
तर खालील सिद्धतेतील रिकाम्या जागा भरून सिद्धता पूर्ण करा.

सिद्धता :

$\triangle PQR$ आणि $\triangle SRQ$ काटकोन त्रिकोण आहेत. (......................)

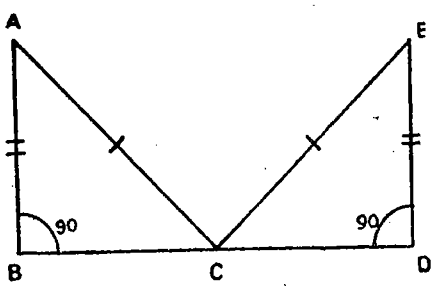
$PQR \longleftrightarrow SRQ$ ही संगती दिलेली असता

बाजू PR ≅ बाजू SQ (......................)

बाजू QR ≅ बाजू QR (......................)

∴ $\triangle PQR \cong$ ...... (......................)

∴ बाजू PQ ≅ ...... (......................)



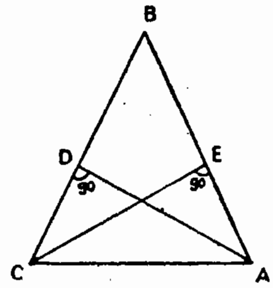
आ. 4·43

3. बाजूस दिलेल्या आकृतीत
रेख AB ⊥ रेख BC,
रेख ED ⊥ रेख DC,
बाजू AC ≅ बाजू EC आणि
बाजू AB ≅ बाजू ED तर
सिद्ध करा की रेख BC ≅ रेख CD.

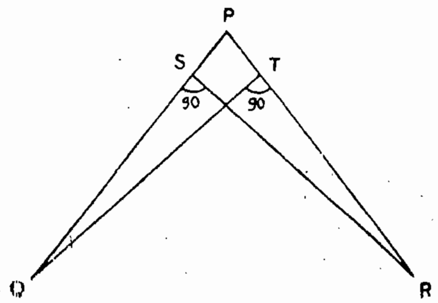
4. बाजूच्या आकृतीत $l(AD) = l(CE)$ आणि

$m\angle ADC = m\angle AEC = 90$ तर

सिद्ध करा की बाजू BA ≅ बाजू BC



आ. 4·44



आ. 4·45

5. बाजूच्या आकृतीत $l(TQ) = l(SR)$

आणि $m\angle QSR = m\angle RTQ = 90$

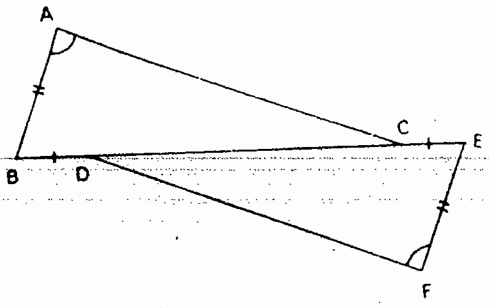
तर सिद्ध करा की रेख PQ ≅ रेख PR

6. बाजूच्या आकृतीत रेख AB ⊥ रेख AC,

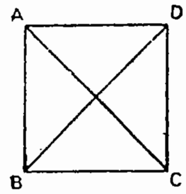
रेख EF ⊥ रेख DF, रेख AB ≅ रेख EF

आणि रेख BD ≅ रेख CE

तर सिद्ध करा की रेख AC ≅ रेख FD



आ. 4·46



आ. 4·47

7. बाजूच्या आकृतीत

$m\angle BAD = m\angle ABC = m\angle ADC = m\angle BCD = 90.$

कर्ण AC ≅ कर्ण BD

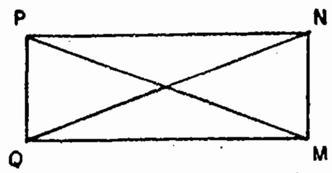
तर चौकोन ABCD च्या सर्व बाजू एकरूप आहेत हे सिद्ध करा.

8. बाजूस दिलेल्या आकृतीत

$m\angle PQM = m\angle QMN = m\angle MNP = \angle NPQ = 90$

कर्ण PM ≅ कर्ण QN

तर सिद्ध करा की बाजू PN ≅ बाजू QM.



आ. 4·48

9. समद्विभुज त्रिकोणाच्या पायाच्या टोकांपासून समोरील बाजूंवर लंब असलेले रेषाखंड एकरूप असतात हे सिद्ध करा.

10. समभुज त्रिकोणांचे शिरोलंब एकरूप असतात हे सिद्ध करा.

§ 4·24 विषमभुज त्रिकोणाच्या बाजू व कोन :

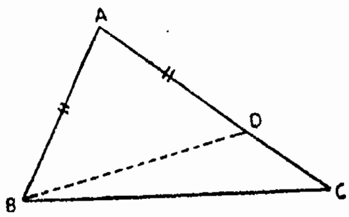
त्रिकोणाच्या तीनही बाजू एकरूप असतील तर तीनही कोन एकरूप असतात व त्रिकोणाच्या दोन बाजू एकरूप असतील तर त्यांच्या समोरील कोन एकरूप असतात हे तुम्हांला माहीत आहे. त्रिकोणाच्या बाजू एकरूप नसतील तर त्यांच्यासमोरील कोनात काय संबंध असला पाहिजे? मोठ्या बाजूसमोरील कोन मोठा असला पाहिजे असे तुम्हांला वाटते ना? हे सत्य आहे का ते आता आपण पाहू.

§ 4·25 ■ प्रमेय :

त्रिकोणाच्या दोन बाजू एकरूप नसतील तर त्यांच्या समोरील कोन एकरूप नसतात आणि मोठ्या बाजूसमोरील कोन मोठा असतो.

हे प्रमेय सिद्ध करण्यासाठी 'समद्विभुज त्रिकोणाच्या पायालगतचे कोन एकरूप असतात' हे प्रमेय वापरायचे आहे, तर कोणती रचना करावी लागेल?

खाली दिलेली सिद्धता पाहा.



आ. 4·49

पक्ष : $\triangle ABC$ मध्ये $l(AC) > l(AB)$.

साध्य : $\angle ABC > \angle ACB$

सिद्धता : किरण AC वर बिंदू D असा घ्या की, $l(AB) = l(AD)$

आता $\triangle ABD$ मध्ये

बाजू AB ≅ बाजू AD (रचना)

$\therefore m\angle ABD = m\angle ADB$ (समद्विभुज त्रिकोणाच्या पायालगतचे कोन)

$\angle ADB$ हा $\triangle DBC$ चा बाह्यकोन आहे.

$\therefore m\angle ADB > m\angle DCB$

म्हणजेच $m\angle ADB > m\angle ACB$

पण $m\angle ADB = m\angle ABD$ (सिद्ध)

$\therefore m\angle ABD > m\angle ACB$ (1)

आता $m\angle ABC = m\angle ABD + m\angle DBC$ (कोनांच्या बेरजेचे गृहीतक)

$\therefore m\angle ABC > m\angle ABD$ ($m\angle DBC$ ही एक धन संख्या आहे) (2)

(1) व (2) वरून

$m\angle ABC > m\angle ACB$

$\therefore \angle ABC > \angle ACB$

वरील प्रमेयाचा व्यत्यास सांगा.

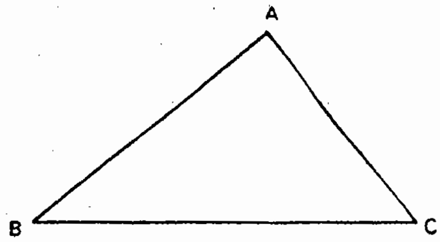
§ 4·26 ■ प्रमेय :

त्रिकोणाचे दोन कोन एकरूप नसतील तर त्यांच्या समोरील बाजू एकरूप नसतात आणि मोठ्या कोनासमोरील बाजू मोठी असते.

प्रमेयाची सिद्धता देण्याची जी पद्धत तुम्ही आतापर्यंत शिकलात त्यापेक्षा वेगळ्या पद्धतीने वरील प्रमेयाची सिद्धता दिली आहे. या पद्धतीची सविस्तर चर्चा, पुढील प्रकरणात केली आहे.

पक्ष : △ ABC मध्ये ∠C > ∠B

साध्य : $l(AB) > l(AC)$



आ. 4·50

सिद्धता : $l(AB)$ आणि $l(AC)$ या वास्तव संख्या आहेत. म्हणून यांच्या परस्पर-संबंधाबाबत फक्त तीन पर्याय संभवतात.

(1) $l(AB) = l(AC)$,

(2) $l(AB) < l(AC)$, आणि

(3) $l(AB) > l(AC)$.

या तीनपैकी पहिले दोन पर्याय अशक्य आहेत असे सिद्ध केले तर तिसरा एकच पर्याय उरतो व त्याचा अर्थ प्रमेय सत्य आहे असा होतो.

(1) जर $l(AB) = l(AC)$; तर 'समद्विभुज त्रिकोणाच्या पायालगतचे कोन एकरूप असतात' या प्रमेयानुसार ∠B ≅ ∠C.
पण हे शक्य नाही; कारण ∠C > ∠B हे दिले आहे.
∴ $l(AB) = l(AC)$ हे अशक्य आहे.

(2) जर $l(AB) < l(AC)$; तर 'त्रिकोणात मोठ्या बाजूसमोरील कोन मोठा असतो.' या प्रमेयानुसार ∠C < ∠B.
पण हेही शक्य नाही; ∠C > ∠B हे दिले आहे.
∴ $l(AB) < l(AC)$ हे अशक्य आहे.

(3) $l(AB) = l(AC)$ आणि $l(AB) < l(AC)$ हे दोन्ही पर्याय अशक्य असल्यामुळे $l(AB) > l(AC)$ हेच फक्त शक्य आहे.
∴ $l(AB) > l(AC)$ हे सिद्ध झाले.

वरील प्रमेयावरून खालील उपप्रमेय मांडता येते.

उपप्रमेय :

काटकोन त्रिकोणात कर्ण ही सर्वात मोठी बाजू असते.

हे उपप्रमेय सिद्ध करा.

§ 4·27 प्रश्न :

1. (a) △ ABC आणि △ DEF मध्ये बाजू AB ≅ बाजू DE, बाजू BC ≅ बाजू EF आणि ∠B ≅ ∠E; तर बाजू CA आणि बाजू FD यांच्या लांबीत काय संबंध असेल?
   (b) △ PQR आणि △ MNK मध्ये बाजू PQ ≅ बाजू MN, बाजू QR ≅ बाजू NK आणि ∠Q > ∠N; तर बाजू RP आणि बाजू KM यांच्या लांबीत काय संबंध असेल?
   (c) △EST आणि △ XYZ मध्ये बाजू ST ≅ बाजू YZ, बाजू TE ≅ बाजू ZX आणि ∠T < ∠Z; तर बाजू ES आणि बाजू XY यांच्या लांबीत काय संबंध असेल?
2. △ DEF मध्ये $l(DE) = 7$, $l(EF) = 12$ आणि $l(DF) = 6$; तर या त्रिकोणाचा सर्वात मोठा व सर्वात लहान कोन कोणता असेल?

3. $\triangle ABC$ मध्ये $l(AB)=4$, $l(BC)=9$ आणि $l(AC)=7$; तर खालीलपैकी कोणते विधान सत्य आहे ? सत्य असलेले विधान, प्रश्नाच्या शेवटी दिलेल्या रिकाम्या कंसात लिहा.

(a) $m\angle B > m\angle C > m\angle A$ (b) $m\angle A > m\angle B > m\angle C$

(c) $m\angle C > m\angle A > m\angle B$ (d) $m\angle A > m\angle C > m\angle B$

(.........................)

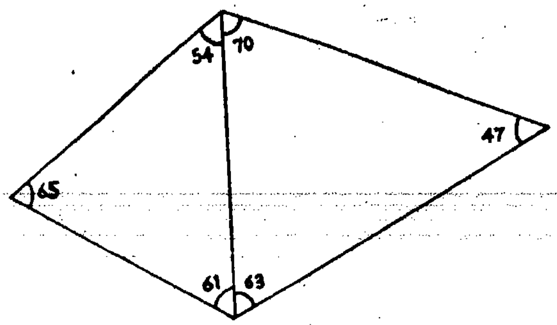
4. $\triangle LSN$ मध्ये $m\angle L=80$, $m\angle S=40$ आणि $m\angle N=60$, तर या त्रिकोणाची सर्वात मोठी व सर्वात लहान बाजू कोणती ?

5. $\triangle TPQ$ मध्ये $m\angle T=65$, $m\angle P=95$ आणि $m\angle Q=20$; तर खालीलपैकी कोणते विधान सत्य आहे ? सत्य असलेले विधान, प्रश्नाच्या शेवटी दिलेल्या रिकाम्या कंसात लिहा.

(a) $l(PQ) < l(TP) < l(TQ)$ (b) $l(PQ) < l(TQ) < l(TP)$

(c) $l(TQ) < l(TP) < l(PQ)$ (d) $l(TP) < l(PQ) < l(TQ)$

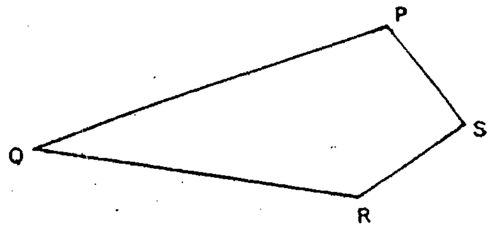
(.........................)



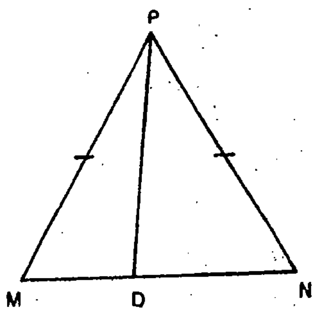
आ. 4·51

6. आ. 4·51 मधील सर्वात मोठा व सर्वात लहान रेषाखंड कोणता असेल ? कारण सांगा.

7. बाजूच्या आकृतीत रेख PQ सर्वात मोठी बाजू आणि रेख RS सर्वात लहान बाजू असेल तर सिद्ध करा की,
$\angle Q < \angle S$



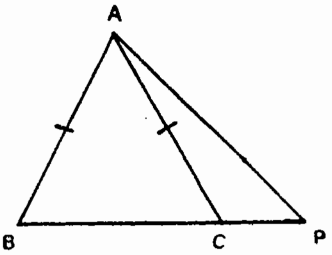
आ. 4·52



आ. 4·53

8. शेजारच्या आकृतीत बाजू PM $\cong$ बाजू PN आणि M–D–N; तर सिद्ध करा की,
$l(PD) < l(PM)$

9. बाजूच्या आकृतीत बाजू AB ≅ बाजू AC आणि
B—C—P; तर सिद्ध करा की,
$l(AP) > l(AB)$



आ. 4·54

10. △ ABC मध्ये $l(AB) > l(AC)$ आणि बिंदू D हा बिंदू B व बिंदू C यांच्या दरम्यान आहे; तर सिद्ध करा की,
$l(AD) < l(AB)$

11. △ PQR मध्ये $l(PQ) > l(PR)$ आणि बिंदू Q हा बिंदू S व बिंदू R यांच्या दरम्यान आहे; तर सिद्ध करा की
$l(PR) < l(PS)$

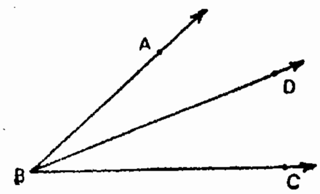
12. कोणत्याही त्रिकोणात दोन भुजांच्या लांबींची बेरीज तिसऱ्या भुजेच्या लांबीपेक्षा मोठी असते, हे प्रमेय सिद्ध करा.

§ 4·28 कोनाचा दुभाजक :

समजा बिंदू D हा ∠ ABC च्या अंतर्भागातील एक बिंदू आहे.

किरण BA, किरण BC आणि किरण BD मुळे एकूण किती कोन तयार होतात?

∠ ABC, ∠ ABD आणि ∠ DBC यांच्या मापांत काय संबंध असला पाहिजे?



आ. 4·55

कोनांच्या बेरजेच्या गृहीतकानुसार आपण
$m\angle ABC = m\angle ABD + m\angle DBC$ असे म्हणू शकतो.

किरण BD हा किरण BA आणि किरण BC शी जे कोन तयार करतो ते एकरूप होतील असा D बिंदू ∠ ABC च्या अंतर्भागात घेता येणे शक्य आहे काय? समजा, D बिंदू तसा घेणे शक्य आहे; तर या स्थितीत ∠ ABC, ∠ ABD आणि ∠ DBC यांच्यांत कोणता संबंध असेल?

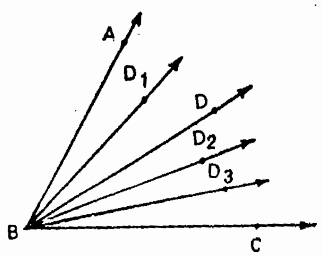
$m\angle ABC = m\angle ABD + m\angle DBC$ हे तर आहेच.

शिवाय $m\angle ABD = m\angle DBC$ व म्हणून $m\angle ABD = m\angle DBC = \frac{1}{2} m\angle ABC$.

अशा स्थितीत किरण BD हा ∠ ABC ची दुभागणी करतो किंवा किरण BD हा ∠ ABC चा दुभाजक आहे असे म्हणतात. यावरून आपण कोनदुभाजकाची व्याख्या पुढीलप्रमाणे करू.

व्याख्या : बिंदू D हा ∠ ABC च्या अंतर्भागात असेल व ∠ ABD ≅ ∠ DBC, तर किरण BD हा ∠ ABC ची दुभागणी करतो किंवा किरण BD हा ∠ ABC चा **दुभाजक** आहे असे म्हणतात.

∠ ABC च्या अंतर्भागातील खालील आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे D, D_1, D_2, D_3 हे बिंदू घ्या. BD, BD_1, BD_2, BD_3 या किरणांमुळे ∠ ABC ची दुभागणी होते काय? यांपैकी किरण BD हा ∠ ABC चा दुभाजक असेल तर किरण BD_1, किरण BD_2 किंवा किरण BD_3 यांपैकी एखादा किरण ∠ ABC चा दुभाजक आहे काय? कोणत्याही एका कोनाचे दुभाजक किती असतात असे आपणास म्हणता येईल?



आ. 4·56

याचे उत्तर प्रमेयाच्या स्वरूपात कसे मांडाल?

§ 4·29 ▪ प्रमेय :

प्रत्येक कोनास एक आणि एकच दुभाजक असतो.

कोनाची दुभागणी कशी करावी हे तुम्ही यापूर्वी शिकला आहात. दिलेला कोन दुभागला असता आपल्याला किती दुभाजक मिळतात? प्रत्यक्ष रचनेवरून वरील प्रमेयाची सत्यता पटते, हे सिध्द करता येते. पण सिद्धता फार क्लिष्ट असल्याने येथे गाळली आहे.

आपण काय शिकलो?

(1) **संज्ञा–व्याख्या :**

कोनांची, रेषाखंडांची व त्रिकोणांची एकरूपता; बाह्यकोन; कोनदुभाजक.

(2) **कल्पना :**

दोन त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूंमध्ये सहा प्रकारे एकास-एक संगती असू शकते; एकरूपता असणारी दोन त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूंमधील एकास-एक संगती; त्रिकोणांच्या एकरूपतेचे गुणधर्म; उपप्रमेय; प्रमेयाचा व्यत्यास.

(3) **गृहीतके :**

(i) बाकोबा (ii) कोबाको (iii) बाकोको (iv) बाबाबा.

(4) **प्रमेये :**

(i) त्रिकोणाचा बाह्यकोन (ii) समद्विभुज त्रिकोणाच्या पायालगतचे कोन–प्रमेय 4·17 (iii) प्रमेय 4·17 चा व्यत्यास (iv) कर्ण-भुजा (v) त्रिकोणाच्या मोठ्या बाजूसमोरील कोन–प्रमेय 4·25 (vi) प्रमेय 4·25 चा व्यत्यास (vii) कोन-दुभाजकाचे एकमेवत्व.

उपप्रमेये :

(i) काटकोन त्रिकोणाचे काटकोनाखेरीज कोन (ii) त्रिकोणाच्या दोन कोनांच्या मापांची बेरीज (iii) त्रिकोणात कोन काटकोन नसणे (iv) समभुज त्रिकोणाचे कोन–उपप्रमेय 4·17 (v) उपप्रमेय 4·17 चा व्यत्यास (vi) काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण.

प्रश्नसंग्रह

1. दोन त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूतील एकास-एक संगती एकरूपता असते असे आपण केव्हा म्हणतो ?

2. त्रिकोणात बाकोबा संगती एकरूपता असते. त्रिकोणाच्या एकरूपतेची तुम्ही शिकलेली इतर गृहीतके वरील पद्धतीने थोडक्यात लिहा.

3. खालील विधानांतील रिकाम्या जागी योग्य शब्द लिहून विधाने पूर्ण करा.

   (a) दोन काटकोन त्रिकोणात अशी संगती असेल की एका त्रिकोणाचा .... व एक .... दुसऱ्या त्रिकोणाचा .... व संगत .... शी अनुक्रमे एकरूप असतील तर ते त्रिकोण एकरूप असतात.

   (b) समद्विभुज त्रिकोणाच्या पायालगतचे कोन .... असतात.

   (c) त्रिकोणाचे तीनही कोन एकरूप असतील तर त्याच्या तीनही .... एकरूप असतात.

   (d) त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन बाजू एकरूप नसतील तर कोणतेही दोन .... एकरूप नसतात आणि मोठ्या बाजूसमोरील कोन .... असतो.

   (e) काटकोन त्रिकोणात .... सर्वांत मोठी बाजू असते.

4. खालील विधानांचे व्यत्यास लिहा. त्यांपैकी कोणते व्यत्यास नेहमी सत्य असतील ?

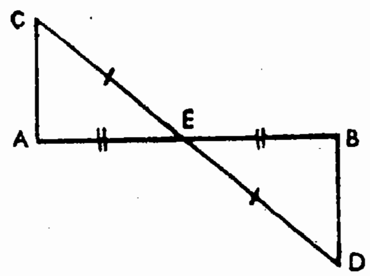
   (a) दोन कोनांपैकी प्रत्येक कोन तिसऱ्या एकाच कोनाचा पूरक कोन असेल तर ते दोन कोन एकरूप असतात.

   (b) समभुज त्रिकोणाचे सर्व कोन एकरूप असतात.

   (c) चौकोनाच्या सर्व बाजू व कोन एकरूप असतील तर त्याचे कर्ण एकरूप असतात.

   (d) चौकोनाच्या समोरासमोरील बाजू एकरूप व समांतर असतील तर त्याचे कर्ण एकमेकांना दुभागतात.

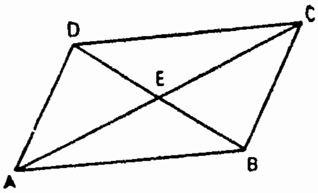
5. बाजूच्या आकृतीत रेख AB व रेख CD एकमेकांना E बिंदूत दुभागतात. खालील सिद्धतेतील रिकाम्या जागा भरून सिद्धता पूर्ण करा.



आ. 4·57

सिद्धता :

विधाने :	कारणे
1. बाजू AE ≅ बाजू EB बाजू CE ≅ बाजू ED	....
2.	परस्पर विरुद्ध कोन
3. $\triangle$ AEC ≅ $\triangle$ DEB	....
4. $\angle$ ACE ≅ $\angle$ EDB	....
5. ....≅ $\angle$ EBD	....
6. बाजू AC ≅	....



आ. 4·58

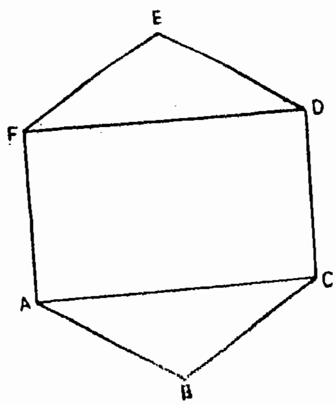
6. बाजूस दिलेल्या प्रतलीय आकृतीत बाजू AB ≅ बाजू DC आणि बाजू AD ≅ बाजू BC, तर खाली दिलेल्या सिद्धतेतील रिकाम्या जागा भरून सिद्धता पूर्ण करा.

सिद्धता :

विधाने	कारणे
1. बाजू AB ≅ बाजू DC बाजू BC ≅ बाजू AD	....
2. बाजू AC ≅ बाजू AC	....
3. △ ABC ≅ △ CDA	....
4. ∠ ACB ≅ ∠ DAC	....
5. बाजू BC ≅ बाजू AD	....
6. ∠ ACB ≅ ∠ DAC	....
7. ∠ CEB ≅ ∠ DEA	....
8. △ CEB ≅ △ AED	....
9. रेख BE ≅ रेख ED रेख CE ≅ रेख EA	....

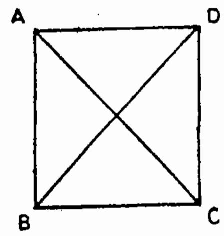
अर्थात कर्ण AC आणि कर्ण BD एकमेकांना E बिंदूत दुभागतात.

7. बाजूच्या आकृतीत षट्कोनाच्या सर्व बाजू व सर्व कोन एकरूप आहेत. सिद्ध करा की, रेख AC ≅ रेख FD

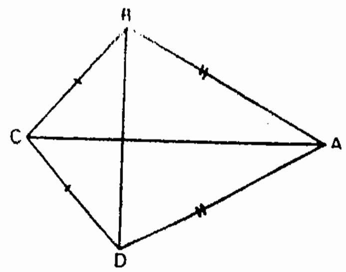


आ. 4·59

8. बाजूच्या आकृतीत चौकोनाचे सर्व कोन व सर्व बाजू एकरूप आहेत. सिद्ध करा की, रेख AC ≅ रेख BD



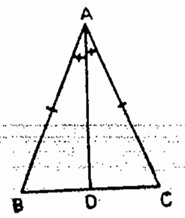
आ. 4·60



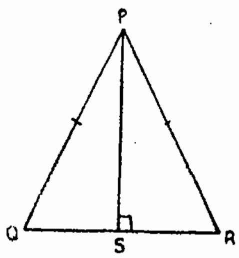
आ. 4·61

9. शेजारच्या आकृतीत बाजू AB ≅ बाजू AD, बाजू BC ≅ बाजू CD; तर सिद्ध करा की, कर्ण AC हा कर्ण BD ला काटकोनात दुभागतो.

10. बाजूच्या आकृतीत बाजू AB ≅ बाजू AC. ∠ BAD ≅ ∠ CAD; तर सिद्ध करा की, रेख BD ≅ रेख DC.



आ. 4·62



आ. 4·63

11. बाजूच्या आकृतीत बाजू PQ ≅ बाजू RP. रेख PS ⊥ रेखQR; तर सिद्ध करा की, किरण PS हा ∠ QPR चा दुभाजक आहे.

पारिभाषिक शब्द

उपप्रमेय – Corrollary
आंतरकोन – Interior Angle
कोबाको गृहीतक – ASA postulate
बाकोबा गृहीतक – SAS Postulate

बाकोको गृहीतक – SAA postulate
बाबाबा गृहीतक – SSS postulate
बाह्यकोन – Exterior Angle
व्यत्यास – Converse

प्रकरण 5

अप्रत्यक्ष सिद्धता

§ 5·1 प्रकरण 1 मध्ये आपण बिंदू, रेषा व प्रतल यांच्यासंबंधी काही गुणधर्म पाहिले. त्यांपैकी काही गुणधर्म आपण गृहीतके म्हणून घेतले व काही प्रमेयांच्या स्वरूपात मांडले. (प्रमेय 1·10 ते 1·13 पाहा.) परंतु या प्रमेयांच्या सिद्धता आपण त्या प्रकरणात दिल्या नव्हत्या. त्यांच्या सिद्धतेत ज्या एका महत्त्वाच्या व उपयुक्त पद्धतीचा उपयोग करतात ती पद्धती चांगल्या तऱ्हेने आत्मसात करून घेणे आवश्यक आहे. म्हणून या प्रकरणात आपण त्या पद्धतीचा विस्ताराने विचार करून वरील प्रमेयांची सिद्धता देऊ. त्यापूर्वी काही उपयुक्त संज्ञांची माहिती करून घेऊ.

§ 5·2 **विधानाचे नकरण** (Negation of a Statement) :

खाली दिलेली दोन विधाने पाहा.

(a) **हा आंबा पिकलेला आहे.**

व (b) **हा आंबा पिकलेला नाही.**

या दोन विधानांत कोणता संबंध दिसून येतो ? या विधानांपैकी एक विधान सत्य मानल्यास दुसरे विधान असत्यच ठरते.

'हा आंबा पिकलेला आहे' हे विधान सत्य मानल्यास 'हा आंबा पिकलेला नाही' हे विधान असत्य ठरते. आणि 'हा आंबा पिकलेला नाही' हे विधान सत्य मानल्यास 'हा आंबा पिकलेला आहे' हे विधान असत्य ठरते.

अशा वेळी पहिल्या विधानाला दुसऱ्या विधानाचे **नकरण** (किंवा **नकारी विधान**) म्हणतात.

म्हणजेच, वरील उदाहरणात, (a) विधानाचे नकरण (b) विधान आहे व (b) विधानाचे नकरण (a) विधान आहे.

(a) विधानाचे नकरण खालीलप्रमाणेही करता येईल.

'हा आंबा पिकलेला आहे, असे नाही.'

या चर्चेवरून आपल्याला दिसून येते की एखादे दिलेले विधान व त्याचे नकरण यांपैकी एक आणि एकच विधान सत्य असते. दोन्ही विधाने एकाच वेळी सत्य असत नाहीत. एखादे विधान असत्य आहे याचा अर्थ त्यांचे नकरण सत्य आहे असा होतो. पुढे आपल्या सिद्धतेत आपण या कल्पनेचा उपयोग करणार आहोत.

नकरणांच्या खालील उदाहरणांचा चांगला अभ्यास करा.

(1) '**आज राम शाळेत हजर नव्हता**' याचे नकरण,
'**आज राम शाळेत हजर होता**' असे होते.

(2) '**माझा सदरा पांढरा आहे**' याचे नकरण,
'**माझा सदरा पांढरा नाही**' असे होईल.

भाषेत 'पांढरा' व 'काळा' हे साधारणपणे विरुद्धार्थी शब्द मानले जातात. परंतु 'पांढरा नसणे' याचा अर्थ 'काळा असणे' असाच होतो असे नाही. म्हणून 'माझा सदरा पांढरा आहे' याचे नकरण, 'माझा सदरा काळा आहे' असे करणे बरोबर होणार नाही.

(3) '**दोन रेषा एकमेकींस एकाच बिंदूत छेदतात**' याचे नकरण काय होईल ?

आपण मागे (प्रकरण 1 मध्ये) पाहिलेच आहे की, 'एकाच बिंदूत छेदणे' याचा अर्थ 'एकापेक्षा जास्त बिंदूत न छेदणे', असा होतो व याचे नकरण 'एकापेक्षा जास्त बिंदूत छेदणे' असे होईल.

म्हणून 'दोन रेषा एकमेकींस **एकाच** बिंदूत छेदतात' याचे नकरण, 'दोन रेषा एकमेकींस **एकापेक्षा जास्त** बिंदूत छेदतात' असे होईल.

(4) '**दोन रेषा एकमेकींस एका बिंदूत छेदतात**' याचे नकरण काय होईल ?

प्रकरण 1 मध्ये आपण पाहिले आहे की 'एका बिंदूत छेदणे' याचा अर्थ 'निदान एका बिंदूत छेदणे' असा होतो व याचे नकरण 'एकाही बिंदूत न छेदणे' असे होईल.

म्हणून 'दोन रेषा एकमेकींस **एका** बिंदूत छेदतात' याचे नकरण 'दोन रेषा **एकाही** बिंदूत छेदत **नाहीत**' असे होईल.

गणितात आपण, 'काही', 'एक', 'एकतरी', 'निदान एक' हे शब्द एकाच अर्थाचे मानतो.

उदाहरणार्थ 'A या संचात, B या संचाचे **काही** घटक आहेत', या विधानांचा अर्थ 'A या संचात B या संचाचा एक (निदान एक) घटक आहे' असा होतो.

तसेच, 'प्रत्येक', 'सर्व', 'कोणताही' हे शब्द एकाच अर्थाचे असतात. उदाहरणार्थ, '**प्रत्येक** रेषा ही बिंदूसंच असते', '**सर्व** रेषा बिंदूसंच असतात' व '**कोणतीही** रेषा ही बिंदूसंच असते' ही तीनही विधाने एकाच अर्थाची आहेत.

(5) 'कालच्या बसच्या अपघातात **काही** लोक जखमी झाले' याचे नकरण 'कालच्या बसच्या अपघातात एकहीजण जखमी झाला नाही' असे होईल. म्हणजेच 'कालच्या बसअपघातात कोणीही जखमी झाले नाही' असा होईल.

(6) 'आज सर्व दुकाने बंद होती.', म्हणजेच 'आज प्रत्येक दुकान बंद होते' या विधानाचे नकरण काय होईल ?

'आज **सर्व** दुकाने बंद **होती**' याचे नकरण, 'आज सर्व दुकाने बंद होती, असे नाही', म्हणजेच 'आज **काही** दुकाने बंद **नव्हती**' असे होईल.

(7) 'तो काही विषयांत नापास झाला' याचा अर्थ 'तो एकतरी विषयात नापास झाला' असा होतो. याचे नकरण 'तो एकही विषयात नापास झाला नाही' असे होईल.

म्हणून 'तो काही विषयांत नापास झाला' याचे नकरण 'तो सर्व विषयांत पास झाला' असे होईल.

वरील सर्व उदाहरणांत (म्हणजेच, प्रत्येक उदाहरणात) पहिल्या विधानाचे नकरण हे दुसरे विधान असेल तर दुसऱ्या विधानाचे नकरण हे पहिले विधान असते हे लक्षात घ्या.

कोणत्याही विधानाचे नकरण हे नकारार्थीच विधान असते असे नाही. दिलेले विधान नकारार्थी असेल तर त्याचे नकरण हे होकारार्थी राहील. या संदर्भात 'नकारार्थी विधान व विधानाचे नकरण' यांची 'ऋण संख्या व विरुद्ध संख्या' यांच्याशी तुलना करता येईल.

§ 5·3 प्रश्न :

खालील विधानांची नकरणे लिहा.

1. माझे घर स्टेशनपासून जवळ आहे.
2. हा मनुष्य वेडा आहे.
3. हे फळ गोड आहे.
4. तीन नैकरेषीय बिंदूतून **एकच** प्रतल जाते.
5. दिलेली रेषा व तिच्या बाहेरील एक बिंदू यांतून **एक** प्रतल जाते.
6. कोणत्याही दोन समसंख्यांची बेरीज समसंख्या असते.
7. X या संचात एकही घटक नाही.
8. प्रत्येक नियमाला अपवाद असतो.
9. आमच्या वर्गातील सर्व विद्यार्थी क्रिकेटचा सामना पाहाण्यास गेले.
10. माझ्या प्रश्नाला कोणीही उत्तर दिले नाही.

§ 5·4 जर–तर विधाने :

मागे व्याख्येवरील चर्चेत आपण पाहिलेच आहे की, गणितात किंवा व्यवहारातील बोलण्यात 'जर—तर' या स्वरूपाची विधाने अनेकदा येतात. उदाहरणार्थ, '**जर** मी चांगला अभ्यास केला, **तर** मी पास होईन, किंवा '**जर** एखादा त्रिकोण समभुज असेल **तर** तो समद्विभुज त्रिकोण असतो.'

अशा 'जर—तर' या स्वरूपाच्या विधानांना **सशर्त** (Conditional) **विधाने** म्हणतात. गणितातील प्रमेये ही बहुधा अशीच सशर्त विधाने असतात. कधी कधी एखादे प्रमेय स्पष्टपणे 'जर–तर' या स्वरूपात नसले तरी ते तसे मांडता येते. उदा. 'प्रत्येक समभुज त्रिकोण हा समकोन त्रिकोण असतो' हे प्रमेय 'जर–तर' या स्वरूपात खालीलप्रमाणे लिहिता येईल.

'**जर** एखादा त्रिकोण समभुज असेल **तर** तो समकोन त्रिकोण असतो.'

वरील सशर्त विधाने पाहिल्यास असे दिसून येते की, असे प्रत्येक विधान हे, 'जर–तर–'च्या साहयाने दोन विधाने जोडून मिळते. या दोन विधानांपैकी पहिल्या ('जर' नंतर येणाऱ्या) विधानाला **पूर्वांग** (Antecedent) म्हणतात व दुसऱ्या ('तर' नंतरच्या) विधानाला **उत्तरांग** (Consequent) म्हणतात. गणितात मात्र पूर्वांगाला ('जर' नंतर येणाऱ्या) विधानाला **पक्ष** म्हणतात व उत्तरांगाला ('तर' नंतर येणाऱ्या विधानाला) **साध्य** म्हणतात.

उदाहरणार्थ, 'जर मी चांगला अभ्यास केला तर मी पास होईन' या सशर्त विधानात, 'मी अभ्यास केला' हे पूर्वांग असून, 'मी पास होईन' हे उत्तरांग आहे.

भूमितीच्या भाषेत, 'प्रत्येक समभुज त्रिकोण हा समकोन त्रिकोण असतो' या प्रमेयात 'एखादा त्रिकोण समभुज आहे' हा पक्ष असतो व 'तो त्रिकोण समकोन त्रिकोण असतो' हे साध्य असते.

उदा. खालील विधाने 'जर-तर' च्या स्वरूपात लिहा.

(1) माझ्या वर्गातील प्रत्येक विद्यार्थी समाजकार्य करतो.

(2) 21 वर्षाखालील व्यक्तीला मतदानाचा हक्क नसतो.

(3) प्रत्येक चौरस हा आयत असतो.

उत्तर (1) जर एखादा विद्यार्थी माझ्या वर्गातला असेल तर तो समाजकार्य करतो.

(2) जर एखादी व्यक्ती 21 वर्षाखालील असेल तर तिला मतदानाचा हक्क नसतो.

(3) जर एखादा चौकोन चौरस असेल तर तो आयत असतो.

§ 5·5 प्रश्न :

खालील विधाने 'जर-तर' च्या स्वरूपात लिहा व यांतील पूर्वांग (किंवा पक्ष) व उत्तरांग (किंवा साध्य) कोणते ते स्पष्ट करा.

1. प्रत्येक आयत हा समांतरभुज चौकोन असतो.
2. मेण तापवल्यास ते वितळते.
3. दिल्लीत राहणारा मनुष्य भारतात राहतो.
4. एकमेकींस छेदणाऱ्या रेषांतून एक प्रतल जाते.
5. पाच वर्षांखालील मुलांना या शाळेत प्रवेश मिळत नाही.
6. X या संचाचा प्रत्येक घटक, Y या संचात आहे.
7. रेषीय जोडीतील कोनांच्या मापांची बेरीज 180 असते.
8. एकरूप कोनांचे पूरक कोनही एकरूप असतात.
9. समद्विभुज त्रिकोणाचे दोन कोन एकरूप असतात.

§ 5·6 पुरेसे आणि आवश्यक :

'जर—तर' विधानातील 'जर'नंतर येणारे विधान म्हणजे पक्ष किंवा पूर्वांग हे 'तर' नंतर येणाऱ्या विधानाला म्हणजे साध्याला किंवा उत्तरांगाला **पुरेसे** असते, असे म्हणतात. याउलट, साध्य किंवा उत्तरांग म्हणजे 'तर'नंतरचे विधान हे पक्षाला किंवा पूर्वांगाला म्हणजे 'जर'नंतरच्या विधानाला **आवश्यक** आहे असे म्हणतात.

उदाहरणार्थ, 'जर तीन कोन एखादया त्रिकोणाचे कोन असतील, तर त्यांच्या मापांची बेरीज 180 असते' ह्या प्रमेयातील 'तीन कोन एखादया त्रिकोणाचे कोन आहेत' हे विधान 'त्यांच्या मापांची बेरीज 180 आहे' ह्या विधानाला पुरेसे आहे असे म्हणता येईल; आणि 'त्यांच्या मापांची बेरीज 180 आहे' हे विधान '(ते) तीन कोन एखादया त्रिकोणाचे कोन आहेत' ह्या विधानाला आवश्यक आहे असे म्हणता येईल.

'जर $a=b$, तर $a+c=b+c$' ह्या प्रमेयातील '$a=b$' हे विधान '$a+c=b+c$' ह्याला पुरेसे आहे असे म्हणू व '$a+c=b+c$' हे '$a=b$' ला आवश्यक आहे असे म्हणू.

§ 5·7 प्रश्न :

5·5 प्रश्नातील, विधाने 'जर—तर' स्वरूपात लिहून झाल्यावर त्यातील कोणते विधान कशाला पुरेसे आहे व कोणते कशाला आवश्यक आहे ते सांगा.

§ 5·8 सशर्त विधानांचा व्यत्यास :

प्रकरण 4 मध्ये तुम्ही; प्रमेयाचा व्यत्यास म्हणजे काय हे पाहिले. उदाहरणार्थ, 'जर एखादया त्रिकोणात दोन बाजू एकरूप असतील, तर त्या त्रिकोणाचे दोन कोन एकरूप असतात' या प्रमेयाचा व्यत्यास, 'जर एखादया त्रिकोणात दोन कोन एकरूप असतील, तर त्या त्रिकोणाच्या दोन बाजू एकरूप असतात' असा होतो.

या प्रमेयाचा पक्ष (त्रिकोणाच्या दोन बाजू एकरूप असतात) म्हणजे त्याच्या व्यत्यासाचे साध्य आहे व प्रमेयाचे साध्य (त्या त्रिकोणाचे दोन कोन एकरूप असतात) म्हणजे त्याच्या व्यत्यासाचा पक्ष आहे.

यावरून तुमच्या लक्षात येईल की, एखादया दिलेल्या सशर्त विधानानातील पूर्वांग व उत्तरांग यांच्या स्थानांची अदलाबदल करून मिळणाऱ्या (सशर्त) विधानाला, दिलेल्या विधानाचा **व्यत्यास** (Converse) म्हणतात.

थोडक्यात, 'जर p, तर q' हे दिलेले सशर्त विधान असेल तर त्याचा व्यत्यास 'जर q, तर p' असा होईल.

एखादे सशर्त विधान सत्य असेल तर त्याचा व्यत्यास सत्य असतोच असे नाही.

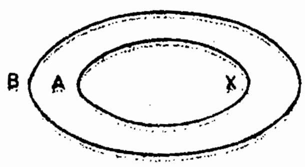
उदाहरणार्थ, 'समद्विभुज त्रिकोणात दोन कोन एकरूप असतात' हे विधान सत्य आहे; तसेच त्याचा व्यत्यास, 'जर एखादया त्रिकोणात दोन कोन एकरूप असतील तर तो समद्विभुज त्रिकोण असतो' हाही सत्य आहे. परंतु 'प्रत्येक समभुज त्रिकोण हा समद्विभुज त्रिकोण असतो' या सत्य विधानाचा व्यत्यास 'प्रत्येक समद्विभुज त्रिकोण समभुज असतो' हा, सत्य नाही.

§ 5·9 प्रश्न : खालील विधानांचे व्यत्यास लिहा व ते सत्य आहेत की असत्य आहेत ते सांगा.

1. प्रत्येक चौरस हा आयत असतो.
2. प्रत्येक आयत हा समांतरभुज चौकोन असतो.
3. जर दोन रेषा एकमेकींस छेदत असतील तर त्या एकाच प्रतलात असतात,
4. नागपूरचा रहिवासी हा महाराष्ट्राचा रहिवासी आहे.
5. प्रत्येक पूर्णांक संख्या ही परिमेय संख्या असते.
6. जर $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$ असेल तर B बिंदू A व C यांच्या दरम्यान असतो.
7. जर P, Q, R हे बिंदू एकरेषीय असतील तर ते बिंदू एकप्रतलीय असतात.
8. जर A बिंदू B व C यांच्या दरम्यान असेल तर A, B, C हे एकरेषीय बिंदू असतात.

§ 5·10 परास्थापन (Contraposition) :

एखादया सशर्त विधानात सांगितलेला आशय त्या विधानापासून मिळणाऱ्या दुसऱ्या एका विधानाने सांगता येतो. या दुसऱ्या विधानाने त्याच आशयावर वेगळा प्रकाश पडतो.



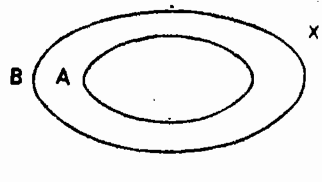
आ. 5·1

उदाहरणार्थ खालील दोन विधाने पाहा.

(a) 'जर x हा, A या संचाचा घटक असेल, तर x हा, B या संचाचा घटक असतो.'

(b) ‘जर x हा B या संचाचा घटक नसेल,

तर x हा A या संचाचा घटक नसतो.’



आ. 5·2

या विधानांचा तुम्ही स्वतःच विचार केलात तर तुमच्या लक्षात येईल की, दोन्ही विधानांचा अर्थ एकच आहे. दोन्ही विधानांत पर्यायाने A हा संच B या संचाचा उपसंच आहे हेच सांगितले आहे.

परंतु या विधानांच्या स्वरूपात फरक आहे. विधान (a) मधील उत्तरांगाचे नकरण म्हणजे विधान (b) मधील पूर्वांग होय आणि विधान (a) मधील पूर्वांगाचे नकरण म्हणजे विधान (b) चे उत्तरांग होय.

अशा वेळी (b) विधानाला, (a) विधानाचे **परास्थापन** (**किंवा व्यतिरेक**) म्हणतात.

परास्थापनाची आणखी उदाहरणे पाहा.

‘प्रत्येक पूर्णांक संख्या ही परिमेय संख्या असते’ या विधानाचे परास्थापन ‘जर एखादी संख्या ही परिमेय संख्या नसेल, तर ती पूर्णांक संख्या नसते’ असे होते.

तसेच, ‘प्रत्येक समभुज त्रिकोण हा समद्विभुज त्रिकोण असतो’ या विधानाचे परास्थापन ‘जर एखादा त्रिकोण समद्विभुज त्रिकोण नसेल तर तो समभुज त्रिकोण नसतो’ असे होते.

वरील चर्चेवरून तुम्हाला दिसून येईल की सशर्त विधानात, पूर्वांग व उत्तरांग यांच्या स्थानांची अदला-बदल केल्यास, त्या विधानाचा व्यत्यास मिळतो; व त्या विधानात, पूर्वांग व उत्तरांग यांची नकरणे घेऊन नंतर त्यांच्या स्थानांची अदलाबदल केल्यास, त्या विधानाचे परास्थापन मिळते.

पण येथे लक्षात ठेवले पाहिजे की, एखादे सशर्त विधान सत्य असेल तर त्याचे परास्थापनही सत्य असते. पण त्या विधानाचा व्यत्यास सत्य असतोच असे नाही.

§ 5·11 प्रश्न :

1. § 5·7 च्या प्रश्नांतील विधानांची परास्थापने लिहा.
2. खालील विधानांची परास्थापने लिहा.
   - (a) जर P बिंदू हा $\angle ABC$ च्या अंतर्भागात असेल तर $m\angle ABP + m\angle PBC = m\angle ABC$.
   - (b) जर M हा बिंदू A व C यांच्या दरम्यान असेल तर A व M हे बिंदू C मधून जाणाऱ्या रेषेच्या एकाच बाजूस असतात.
   - (c) जर दिलेल्या संख्येचा शेवटचा अंक 2 असेल तर त्या संख्येला 2 ने भाग जातो.
   - (d) दिल्लीचा रहिवासी हा भारताचा रहिवासी असतो.
   - (e) जर एखादा कोन लघुकोन असेल तर त्याचे माप 90 पेक्षा कमी असते.

§ 5·12 अप्रत्यक्ष पद्धती (Indirect Method) :

आता आपण, प्रमेय 1·10 ते 1·14 यांच्या सिद्धतेकरता आवश्यक असलेल्या विशिष्ट पद्धतीकडे वळू. प्रमेय सिद्ध करण्याच्या या विशिष्ट पद्धतीला अप्रत्यक्ष पद्धती म्हणतात. अप्रत्यक्ष पद्धतीचा विचार करण्यापूर्वी, प्रत्यक्ष पद्धती म्हणजे काय हे पाहिले पाहिजे. मागील प्रकरणांतील सिद्धता पाहिल्यास तुमच्या लक्षात येईल की, या सिद्धतांमध्ये आपण पक्षापासून सुरवात करून पायरीपायरीने प्रमेयाचे साध्य सिद्ध करतो. ही झाली सिद्धतेची प्रत्यक्ष पद्धती. प्रत्यक्ष पद्धतीने दिलेल्या सिद्धतेला **प्रत्यक्ष सिद्धता** (Direct Proof) म्हणतात.

याउलट अप्रत्यक्ष पद्धतीत, प्रमेयाचे साध्य असत्य आहे असे आपण (तात्पुरते) गृहीत धरतो. म्हणजेच साध्याचे नकरण सत्य आहे असे गृहीत धरतो. यावरून आपल्याला माहीत असलेल्या एखादया सत्य विधानाशी किंवा पक्षाशी विसंगत असा निष्कर्ष काढतो. या विसंगतीवरून आपण म्हणू शकतो की, प्रमेयाचे साध्य असत्य आहे, हे जे आपण सुरवातीला गृहीत धरले होते, तसे ते गृहीत धरणे चूक असले पाहिजे. यावरून (प्रमेयातील पक्षावरून) साध्याची सिद्धता प्रस्थापित झाली आहे असे आपण म्हणू शकतो. अप्रत्यक्ष पद्धतीने दिलेल्या सिद्धतेला **अप्रत्यक्ष सिद्धता** म्हणतात.

एखादे विधान सिद्ध करण्यासाठी वापरलेली ही पद्धती आपल्याला नवी नाही. या पद्धतीत असलेला युक्तिवाद आपण दैनंदिन जीवनात अनेकदा वापरतो. उदाहरणाकरता, आपल्या नेहमीच्या अनुभवातला खालील युक्तिवाद पाहा.

'आज या मुलाची प्रकृती बिघडली असावी. कारण तसे नसते तर तो सतत रडला नसता. पण आज तो सतत रडतो आहे.'

या आपल्या नेहमीच्या बोलण्यात आपण अप्रत्यक्ष पद्धतीचा कसा उपयोग करतो ते पाहा.

आपल्याला म्हणायचे असते की, 'आज या मुलाची प्रकृती बिघडली आहे.' त्यासाठी आपण 'मुलाची प्रकृती बिघडली नाही' हे गृहीत धरतो. ('तसे नसते तर' या शब्दांद्वारे आपण साध्याचे नकरणच करतो.) यावरून कोणता निष्कर्ष निघतो ते पाहतो. 'त्याची प्रकृती बिघडली नाही' असे मानले तर 'तो सतत रडला नसता' असा निष्कर्ष निघतो. कारण साधारणतः मुलांची प्रकृती बिघडली नसली तर ती सतत रडत नाहीत. परंतु 'तो रडला नसता' हा निष्कर्ष, 'आज तो सतत रडतो आहे' या अनुभवाशी विसंगत आहे. म्हणून मुलाची प्रकृती बिघडली असावी हा आपला तर्क खरा ठरतो.

आणखी एक उदाहरण पाहा.

'बाहेर पाऊस पडत असला पाहिजे. कारण तसे नसते तर सर्व लोक छत्र्या व रेनकोट घेऊन आले नसते.' या वाक्यांत देखील अप्रत्यक्ष पद्धतीचा उपयोग केला आहे हे आता तुमच्या लक्षात येईल.

भूमितीत ही पद्धती कशी वापरतात हे खालील प्रमेयांच्या सिद्धांतांवरून सहज लक्षात येईल. या प्रमेयांची चर्चा प्रकरण 1 मध्ये झालेलीच आहे.

§ 5·13 ▪ प्रमेय :

जर दोन भिन्न रेषा एकमेकींस छेदत असतील तर त्या एकाच बिंदूत छेदतात.

पक्ष : L व M या भिन्न रेषा एकमेकींस छेदतात.

साध्य : L व M या रेषा एकाच बिंदूत छेदतात.

सिद्धता : पक्षानुसार, रेषा L व रेषा M या एकमेकींस छेदतात हे उघड आहे. 'या रेषा एकाच बिंदूत छेदतात' हे साध्य असत्य आहे असे मानू.

म्हणजेच, त्या रेषा एकापेक्षा जास्त बिंदूंत छेदतात. (§ 5·2, उदा० 3 पाहा.)

समजा P व Q हे त्यांचे दोन छेदनबिंदू आहेत.

आता, P हा L व M या रेषांचा छेदनबिंदू आहे. म्हणजेच L व M या रेषा P मधून जातात. त्याचप्रमाणे त्या Q मधूनही जातात.

यावरून P व Q या दोन बिंदूंतून, L व M या दोन भिन्न रेषा जातात, असा निष्कर्ष निघतो.

परंतु हा निष्कर्ष रेषेच्या गृहीतकाशी (गृहीतक 1) विसंगत आहे. कारण या गृहीतकानुसार, दोन भिन्न बिंदूंतून (एक आणि) एकच रेषा जाते.

म्हणजेच, प्रमेयाचे साध्य असत्य आहे असे मानल्यास आपल्याला वरील विसंगती मिळते. म्हणून ते साध्य सत्य असले पाहिजे.

यावरून L व M या रेषा एकमेकींस एकाच बिंदूत छेदतात हे सिद्ध झाले असे आपण म्हणू शकतो.

§ 5·14 ▪ **प्रमेय :**

जर एखाद्या प्रतलास, त्या प्रतलात नसलेली रेषा छेदत असेल, तर ती त्या प्रतलास एकाच बिंदूत छेदते.

पक्ष : E या प्रतलास, L रेषा छेदते. L रेषा, E प्रतलात नाही.

साध्य : L रेषा ही E प्रतलास एकाच बिंदूत छेदते.

सिद्धता : समजा L रेषा, E प्रतलास एकापेक्षा जास्त बिंदूंत छेदते. समजा P व Q हे त्यांचे छेदनबिंदू आहेत.

आता P व Q बिंदू, L रेषेवर आहेत. तसेच ते E प्रतलात देखील आहेत.

याचा अर्थ असा होतो की, L रेषा ही, E या प्रतलातील P व Q या दोन बिंदूंतून जाते.

म्हणून सपाट प्रतलाच्या गृहीतकानुसार (गृहीतक 3)

L रेषा पूर्णपणे E प्रतलात आहे.

पण हा निष्कर्ष पक्षाशी विसंगत आहे. कारण पक्षाप्रमाणे,

L ही रेषा, E प्रतलात नाही.

यावरून L रेषा, E प्रतलास एकाच बिंदूत छेदते, हे सिद्ध होते.

टीप : अप्रत्यक्ष पद्धतीत, सिद्धतेकरता योग्य आकृती काढताच येत नाही हे तुमच्या लक्षात आलेच असेल. उदा० पहिल्या प्रमेयात आपण गृहीत धरतो की दोन रेषा P व Q या दोन बिंदूंत छेदतात. या विधानाशी सुसंगत आकृती काढताच येत नाही. कारण या पद्धतीत गृहीत धरलेले विधान (साध्याचे नकरण) सत्य होईल अशी परिस्थिती संभवतच नाही.

§ 5·15 ▪ **प्रमेय :**

दिलेली रेषा व तिच्या बाहेरील एक बिंदू यांतून जाणारे एक आणि एकच प्रतल असते.

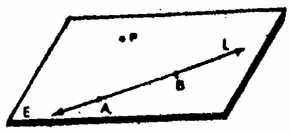
प्रकरण 1 मधील 'एक आणि एकच' यावरील विवेचनावरून (§ 1·7) तुमच्या लक्षात येईल की या प्रमेयात आपल्याला दोन गोष्टी सिद्ध करायच्या आहेत.

(1) दिलेल्या रेषेतून व तिच्या बाहेरील एका बिंदूतून जाणारे (निदान) एक प्रतल असते,

(2) असे एकच प्रतल असते.

यातील पहिल्या विधानाची सिद्धता प्रत्यक्ष पद्धतीने देऊ. या सिद्धतेतील युक्तिवाद आपण प्रकरण 1 मधील या प्रमेयावरील विवेचनात पाहिलाच आहे.

सिद्धता : (1) समजा L ही दिलेली रेषा आहे व P हा त्या रेषेवर नसलेला एक बिंदू आहे.



आ. 5·3

L रेषेवर A व B कोणतेही दोन बिंदू घ्या.
A, B व P हे तीन नैकरेषीय बिंदू आहेत,
∴ प्रतलनिश्चितीच्या गृहीतकानुसार,
A, B व P या बिंदूतून एक प्रतल जाते. त्या प्रतलास E हे नाव दया.

आता L ही रेषा, E या प्रतलातील A व B या बिंदूतून जाते.
∴ सपाट प्रतलाच्या गृहीतकानुसार, L रेषा पूर्णपणे E प्रतलात आहे.
म्हणजेच E हे प्रतल, L रेषेतून जाते. तसेच ते P बिंदूतूनही जाते.
∴ L रेषा व तिच्या बाहेरील P हा बिंदू यांतून जाणारे E हे एक प्रतल असते, हे सिद्ध होते.

(2) आता आपण सिद्ध करू की, L रेषा व P बिंदू यांतून एकच प्रतल जाते. यासाठी आपण अप्रत्यक्ष पद्धती वापरू.
समजा L रेषा व P बिंदू यांतून एकापेक्षा जास्त प्रतले जातात. समजा L रेषेतून व P बिंदूतून जाणारे F हे दुसरे एक प्रतल आहे.
आता A व B बिंदू, L रेषेवर आहेत व F हे प्रतल L रेषेतून जाते. म्हणून F हे प्रतल, A व B या बिंदूतून जाते.
तसेच ते P या बिंदूतूनही जाते.
म्हणजेच F प्रतल, A, B व P या तीन नैकरेषीय बिंदूतून जाते.
पण आपण वर सिद्ध केले की, A, B व P या बिंदूतून E प्रतल जाते.
यावरून असा निष्कर्ष निघतो की, A, B व P या तीन नैकरेषीय बिंदूतून E व F ही दोन प्रतले जातात. हा निष्कर्ष, प्रतल निश्चितीच्या गृहीतकाशी विसंगत आहे.
कारण या गृहीतकानुसार, तीन नैकरेषीय बिंदूतून एकच प्रतल जाते.
यावरून दिलेली रेषा व तिच्या बाहेरील एक बिंदू यांतून जाणारे एकच प्रतल असते हे सिद्ध होते.

§ 5·16 ▪ **प्रमेय :**

एकमेकींस छेदणाऱ्या दोन रेषांमधून जाणारे एक आणि एकच प्रतल असते.

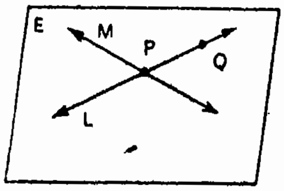
पक्ष : L व M या रेषा, P बिंदूत छेदतात.

साध्य : (1) L व M या रेषांमधून जाणारे (निदान) एक प्रतल असते व (2) L व M या रेषांमधून एकच प्रतल जाते.

यांतील पहिल्या विधानाची सिद्धता आपण प्रत्यक्ष पद्धतीने देऊ. प्रमेयाची सिद्धता देताना आपण कसा विचार करतो हे समजण्यासाठी ही सिद्धता आधी चर्चेच्या स्वरूपात अधिक विस्ताराने दिली आहे. नंतर हीच सिद्धता थोडक्यात दिली आहे.

सिद्धता : (1) आपल्याला सिद्ध करायचे आहे की L व M या रेषांतून एक प्रतल जाते. यासाठी रेषा व प्रतल यासंबंधी कोणते गृहीतक किंवा प्रमेय आपल्याला माहीत आहे?
प्रमेय 5·15 मध्ये आपण आत्ताच सिद्ध केले की दिलेली रेषा व तिच्या बाहेरील एक बिंदू

यांतून एक प्रतल जाते. म्हणून आपण M रेषा व तिच्या बाहेरील, पण L रेषेवरील Q हा कोणताही एक बिंदू घेऊ. वरील प्रमेयानुसार, M रेषा व Q बिंदू यांतून एक प्रतल जाते. त्याला आपण E हे नाव देऊ.



आ. 5·4

E हे प्रतल M रेषेतून जाते हे उघडच आहे. ते L मधून जाते का? ते प्रतल L रेषेमधून जाण्यासाठी (म्हणजेच L रेषा, E प्रतलात असण्यासाठी) कोणत्या गोष्टी आवश्यक आहेत? सपाट प्रतलाच्या गृहीतकानुसार, प्रतलातील दोन बिंदूंतून जाणारी रेषा पूर्णपणे त्या प्रतलात असते. L रेषेवरील P व Q हे बिंदू E प्रतलात आहेत. P बिंदू M रेषेवर असल्यामुळे, M रेषेतून जाणारे प्रतल E हे P बिंदूतूनही जाते.

∴ वरील गृहीतकानुसार L रेषा, E प्रतलात आहे.

यावरून, L व M या रेषांमधून जाणारे E हे एक प्रतल असते, हे सिद्ध होते.

आता हीच सिद्धता संक्षेपाने खाली दिली आहे.

1. L रेषेवर P खेरीज Q हा कोणताही बिंदू घ्या.	
2. Q बिंदू M रेषेवर नाही.	[प्रमेय 5·13 प्रमाणे, L व M यांना एकच बिंदू समाईक असतो व तो P आहे]
3. M रेषा व तिच्या बाहेरील Q बिंदू यातून एकच प्रतल जाते. (त्या प्रतलास आपण E हे नाव देऊ.)	[प्रमेय 5·15]
4. L रेषा E प्रतलात आहे.	[P बिंदू M रेषेत आहे व M रेषा E प्रतलात आहे. L रेषेचे P व Q हे बिंदू E प्रतलात आहेत. म्हणून गृहीतक 3 वरून]
5. ∴ L व M या रेषांमधून जाणारे E हे एक प्रतल आहे.	[विधान 4 व 5 वरून]

(2) [आता आपण सिद्ध करू की, L व M या रेषांतून **एकच** प्रतल जाते. यासाठी अप्रत्यक्ष सिद्धता देऊ.]

6. समजा L व M यांतून जाणारे F हे दुसरे एक प्रतल आहे.	
7. L रेषा व Q बिंदू हे F या प्रतलात आहेत.	[Q बिंदू L रेषेवर आहे व L रेषा F या प्रतलात आहे.]
8. M रेषा व Q बिंदू हे E व F या दोन्ही प्रतलांत आहेत.	[E व F ही प्रतले L व M या रेषांतून जातात व Q हा L रेषेवर आहे.]
9. हे विधान प्रमेय 5·15 शी विसंगत आहे.	[प्रमेय 5·15 प्रमाणे, एक रेषा व तिच्या बाहेरील एक बिंदू यांतून एकच प्रतल जाते.]
10. L व M यांतून जाणारे एकच प्रतल असते.	

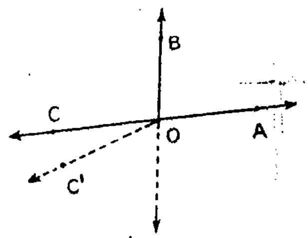
मागील प्रमेयांच्या सिद्धतांवरून तुम्हाला दिसून येईल की, जेव्हा आपण एखादया रेषेचे किंवा प्रतलाचे अस्तित्व (एक तरी असणे) सिद्ध करतो, तेव्हा बहुधा प्रत्यक्ष पद्धतीचा उपयोग करतो. पण जेव्हा आपण एखादया रेषेचे किंवा प्रतलाचे एकमेवत्व (एकच असणे) सिद्ध करतो, तेव्हा अप्रत्यक्ष पद्धतीचा उपयोग करतो. अर्थात, अप्रत्यक्ष पद्धती इतरही अनेक परिस्थितींत उपयुक्त ठरते.

§ 5·17 सोडवलेली उदाहरणे :

1. अप्रत्यक्ष पद्धतीने खालील गुणधर्म सिद्ध करा.

दोन संलग्न कोन एकमेकांचे पूरक असतील तर ते रेषीय जोडीतील कोन असतात.

म्हणजेच, दोन संलग्न कोन एकमेकांचे पूरक असतील तर त्यांच्या असमाईक भुजा विरुद्ध किरण असतात.



आ. 5·5

पक्ष : $\angle$ AOB व $\angle$ BOC हे संलग्न कोन असून ते परस्परांचे पूरक आहेत.

साध्य : $\angle$ AOB व $\angle$ BOC हे रेषीय जोडीतील कोन आहेत, म्हणजे किरण OA व किरण OC हे विरुद्ध किरण आहेत.

सिद्धता : समजा किरण OA व किरण OC हे विरुद्ध किरण नाहीत.

म्हणजे, किरण OA चा विरुद्ध किरण हा किरण OC खेरीज दुसरा एखादा किरण आहे. समजा, तो किरण OC' आहे.

आता किरण OA व किरण OC' विरुद्ध किरण असल्यामुळे, $\angle$ AOB व $\angle$ BOC' हे रेषीय जोडीतील कोन होतात.

म्हणून $m\angle AOB + m\angle BOC' = 180$. ... ... (1)

परंतु पक्षावरून,

$m\angle AOB + m\angle BOC = 180$ ... ... (2)

$\therefore$ (1) व (2) वरून, $m\angle BOC' = m\angle BOC$. ... (3)

आता C व C' हे बिंदू, रेषा OB च्या एकाच बाजूस आहेत. *

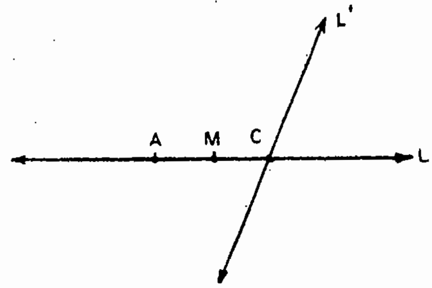
म्हणून, रेषा OB च्या एकाच अर्धप्रतलात, किरण OB शी, एकाच मापाएवढे कोन करणारे, किरण OC व किरण OC' हे दोन किरण आहेत असा निष्कर्ष, (3) वरून निघतो. हा निष्कर्ष कोनरचनेच्या गृहीतकाशी (गृहीतक 12) विसंगत आहे.

यावरून किरण OA व किरण OC हे विरुद्ध किरण आहेत हे सिद्ध होते.

[* हे विधान सिद्ध करणे शक्य आहे. पण आपण हे विधान आकृतीवरूनच समजून घेतले आहे.]

2. जर A, M व C हे एकरेषीय बिंदू असून M हा A व C यांच्या दरम्यान असेल, तर A व M हे बिंदू, C मधून जाणाऱ्या, रेषा AC खेरीज कोणत्याही रेषेच्या एकाच बाजूस असतात.
वरील गुणधर्म (प्रमेय, 3·5) सिद्ध करा.

पक्ष : A, M, C हे बिंदू L रेषेवर आहेत. M हा A व C यांच्या दरम्यान आहे. L′ ही रेषा, C मधून जाणारी कोणतीही एक रेषा आहे. L′ व L भिन्न आहेत.



आ. 5·6

साध्य : A व M हे बिंदू L′ रेषेच्या एकाच बाजूस आहेत.

सिद्धता : समजा A व M हे L रेषेच्या एका बाजूस नाहीत. म्हणजेच ते त्या रेषेच्या विरुद्ध बाजूस आहेत.

∴ प्रतल विभाजनावरून, रेख AM हा L′ रेषेला छेदतो.

समजा C′ हा त्यांचा छेदनबिंदू आहे.

त्यामुळे C′ हा A व M यांच्या दरम्यान राहील. ... ... (1)

आता C′ बिंदू, रेषा AM वर म्हणजेच L रेषेवर आहे. तसेच तो L′ रेषेवर आहे. यावरून C′ हा L व L′ या रेषांचा छेदनबिंदू आहे.

पण पक्षावरून, C हाही, L व L′ रेषांचा छेदनबिंदू आहे.

∴ C=C′ (C व C′ हे एकच बिंदू आहेत) ... ... (2)

(1) व (2) वरून C हा A व M यांच्या दरम्यान राहील.

पण हे विधान, पक्षाशी विसंगत आहे. (पक्षानुसार M हा A व C च्या दरम्यान आहे.)

यावरून A व M हे L′ रेषेच्या एकाच बाजूस आहेत हे सिद्ध होते.

3. दोन रेषा एकाच प्रतलात नसतील तर त्या एकमेकींस छेदत नाहीत, हे सिद्ध करा.

आपण काय शिकलो ?

(1) **संज्ञा – व्याख्या :**
विधान; विधानाचे नकरण; जर–तर विधाने; पूर्वांग व उत्तरांग; पक्ष आणि साध्य; पुरेसे आणि आवश्यक; व्यत्यास; परास्थापन.

(2) **कल्पना :**
सिद्धतेच्या प्रत्यक्ष आणि अप्रत्यक्ष पद्धती.

(3) **प्रमेये :**
(i) रेषा छेदन (ii) प्रतल-रेषा छेदन (iii) प्रतल निश्चिती—1 (vi) प्रतल निश्चिती—2

परिभाषिक शब्द

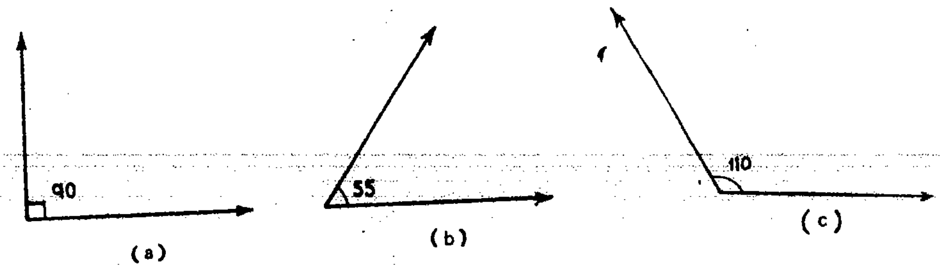
अप्रत्यक्ष सिद्धता – Indirect Proof
उत्तरांग – Consequence
नकरण – Negation
परास्थापन, व्यतिरेक – Contraposition
पूर्वांग – Antecedent
प्रत्यक्ष सिद्धता – Direct Proof
सशर्त – Conditional

प्रकरण 6

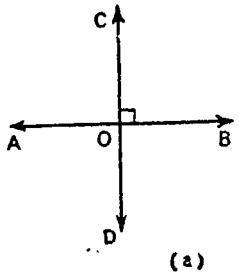
रेषा-रेषांमधील लंबता

§ 6·1 रेषांची लंबता (Perpendicularity of Lines) :

कोनांच्या खालील आकृती पाहा. त्या कोनांच्या दिलेल्या मापांवरून कोणता कोन लघुकोन, काटकोन अथवा विशालकोन आहे, हे तुम्ही चटकन ओळखू शकाल.



आ. 6·1

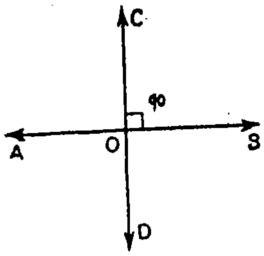


आ. 6·2

वरीलपैकी कोणती आकृती काटकोनाची आहे ?

आकृती 6·2 मध्ये परस्परांना छेदणाऱ्या दोन रेषांमुळे ∠ COB हा काटकोन तयार झाला आहे. अशा वेळेस रेषा CD व रेषा AB परस्परांना लंब (perpendicular) आहेत असे म्हणतात.

व्याख्या : लंबरेषा (Perpendicular Lines)



आ. 6·3

परस्परांना छेदणाऱ्या दोन रेषा जर एक काटकोन निश्चित करीत असतील तर त्यांना **लंबरेषा** म्हणतात.

लंबरेषासंबंधी अधिक माहिती आपणास या प्रकरणात मिळवायची आहे.

आकृती 6·3 मध्ये ∠ COB हा काटकोन असेल तर रेषा AB व रेषा CD ह्या लंबरेषा होतील. हेच विधान, रेषा AB ⊥ रेषा CD असे लिहितात. लंबता दाखवण्यासाठी ⊥ हे चिन्ह वापरले आहे.

म्हणजेच,

जर रेषा AB ⊥ रेषा CD असेल, तर

रेषा CD ⊥ रेषा AB असे होईल.

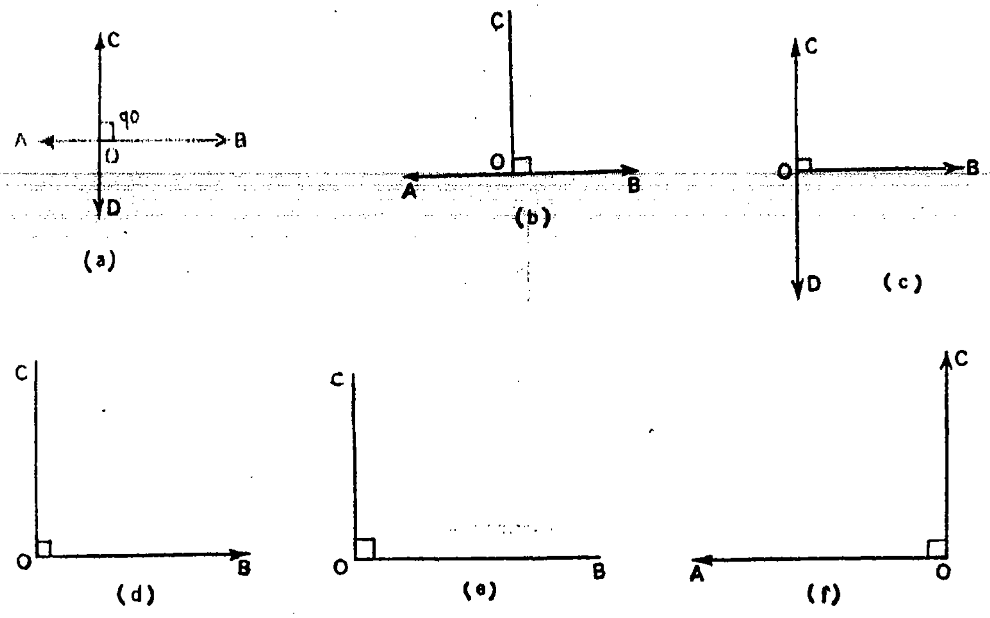
रेषा AB व रेषा CD या लंबरेषा आहेत असे समजा. ∠COB हा काटकोन असेल तर ∠COA च्या मापाबद्दल काय सांगता येते ?

∠AOD व ∠BOD ची मापे काय असतील ?

कोनांच्या रेषीय जोडीचे प्रमेय व काटकोनांचे प्रमेय यावरून असे सांगता येईल की, ∠COB हा काटकोन असेल तर ∠COA, ∠AOD व ∠BOD हे उरलेले कोन देखील काटकोन असतात. म्हणजेच, जर दोन रेषा परस्परांना लंब असतील तर त्यांनी निश्चित केलेले चारही कोन काटकोन असतात.

§ 6·2 रेषाखंडांची व किरणांची लंबता :

समजा दोन किरण किंवा दोन रेषाखंड किंवा एक किरण व एक रेषाखंड एकमेकांना छेदत असतील तर ते परस्परांस लंब आहेत असे केव्हा म्हणता येईल ? खालील आकृतीत एकूण सहा प्रकार दाखवले आहेत.



आ. 6·4

आकृती (a) : रेषा AB लंब रेषा CD

(b) : रेषाखंड CO हा रेषा AB ला लंब आहे.

(c) : किरण OB ⊥ रेषा CD

(d) : रेख OC ⊥ किरण OB

(e) : रेख OC ⊥ रेख OB

(f) : किरण OA ⊥ किरण OC.

यावरून हे स्पष्ट होईल की दोन एकमेकींस छेदणाऱ्या रेषा, किरण व रेषाखंड देखील परस्परांना लंब असू शकतात. मात्र त्यांनी निश्चित केलेल्या अथवा त्यांना समाविष्ट करणाऱ्या रेषा परस्परांस लंब असावयास हव्यात.

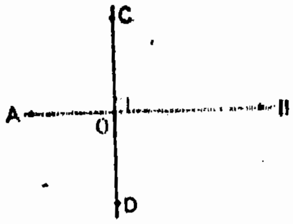
उदाहरणार्थ, आकृती (e) मध्ये, रेखOC ⊥ रेखOB आहे. कारण या दोन रेषाखंडांनी निश्चित केलेल्या अथवा त्यांना समाविष्ट करणाऱ्या रेषा परस्परांस लंब आहेत.

वरील चर्चेचा सारांश पुढे दिला आहे.

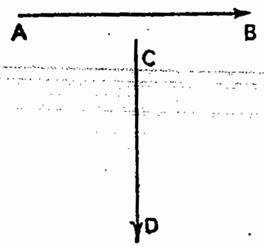
दोन रेषा एकमेकींस लंब असून त्यांपैकी एका रेषेचा कोणताही भाग (रेषाखंड, किरण किंवा ती रेषासुद्धा) हा दुसऱ्या रेषेस किंवा तिच्या कोणत्याही भागास (रेषाखंड, किरण) छेदत असेल तर ते भाग परस्परांस लंब असतात.

याच संबंधात आपणास असेही सांगता येईल की, ज्या वेळेस, दोन रेषाखंड, दोन किरण अथवा एक रेषाखंड व एक किरण परस्परांस लंब असतील त्यावेळेस, त्यांना समाविष्ट करणाऱ्या रेषाही परस्परांस लंब असतात.

उदाहरणार्थ, आकृती 6·5 मध्ये रेखAB ⊥ रेखCD आहे. याचाच अर्थ रेषाAB ⊥ रेषाCD आहे असा होतो.



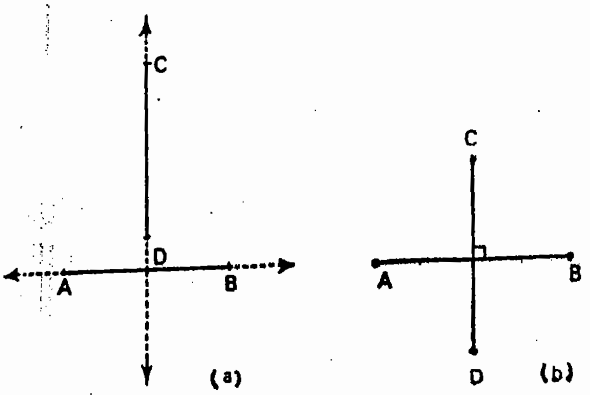
आ. 6·5



आ. 6·6

आता आकृती 6·6 पाहा. यात किरण AB व किरण CD असे आहेत की त्यांना समाविष्ट करणाऱ्या रेषा परस्परांना लंब आहेत. पण ते किरण एकमेकांस छेदत नाहीत. मग अशा परिस्थितीत ते परस्परांस लंब आहेत का ? वरील चर्चेच्या अनुरोधाने असे सांगता येईल की, त्यांना समाविष्ट करणाऱ्या रेषा परपस्परांना लंब असल्यामुळे ते किरण परस्परांना लंब होतील. या अर्थाने जरी हे किरण परस्परांस लंब असले तरी अशा परिस्थितीचा विचार या पुस्तकात होणार नाही. आपल्या, किरणांच्या लंब-तेच्या संकल्पनेनुसार, ते किरण परस्परांना छेदणे आवश्यक आहे. म्हणजेच लंब असलेल्या रेषेचे भाग पपस्परांस छेदत असतील तरच ते भाग परस्परांस लंब आहेत, असे आपण म्हणणार आहोत.

आकृती 6·7 पैकी आकृती (a) मध्ये, रेख AB हा रेख CD ला लंब **नाही,** असे आपण म्हणू. कारण जरी त्यांनी निश्चित केलेल्या रेषा परस्परांना लंब असल्या तरी हे दोन्ही रेषाखंड एकमेकांस छेदत नाहीत.
आकृती (b) मध्ये मात्र रेख AB व रेख CD हे परस्परांस लंब आहेत.



आ. 6·7

§ 6·3 **प्रश्न :**

1. रिकाम्या जागीं योग्य शब्द भरून विधाने पूर्ण करा.

   (i) ज्या कोनाचे माप ——— असेल त्या कोनाला काटकोन म्हणतात.

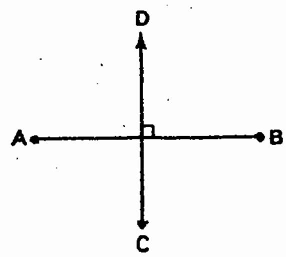
   (ii) जर दोन रेषा परस्परांना काटकोनात छेदत असतील वर त्या रेषा परस्परांना ——— आहेत असे म्हणतात.

   (iii) 'रेषा AB ही रेषा CD ला लंब आहे' हे ——— असे लिहितात.

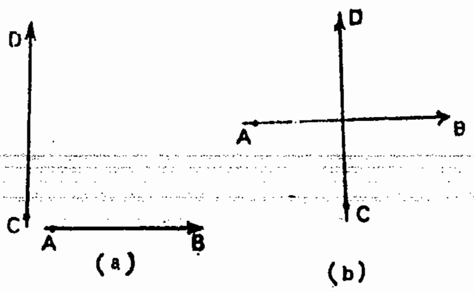
   (iv) रेषीय जोडीतील दोन कोन समान मापाचे असतील तर प्रत्येक कोन ——— असतो.

   (v) 'रेषा PQ ⊥ रेख AB' हे ——— असे वाचतात.

   (vi) 'आकृती 6·8 मध्ये ——— ⊥ ——— आहे.



आ. 6·8



आ. 6·9

   (vii) आकृती 6·9 मधील

   (a) मध्ये किरण AB हा किरण CD ला लंब ——— (आहे / नाही).

   व (b) मध्ये किरण AB ⊥ किरण CD ——— (आहे / नाही).

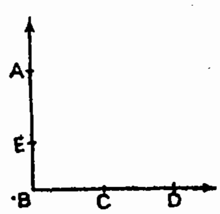
2. आकृती 6·10 मध्ये ∠ABC हा काटकोन दिला आहे. तर खालीलपैकी कोणती विधाने सत्य आहेत ते सांगा.

   (i) रेषा AB ⊥ रेषा BC   (ii) रेख BC ⊥ रेख EA

   (iii) किरण CD ⊥ किरण BA   (iv) रेख BC ⊥ रेख EB

   (v) किरण AE ⊥ किरण BD   (vi) किरण BD ⊥ रेख AE

   (vii) किरण BA ⊥ रेख BC.



आ. 6·10

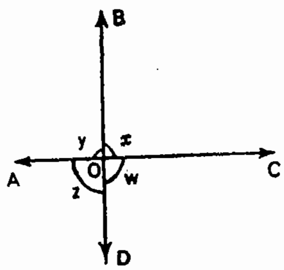
3. आकृती 6·11 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे रेषा AC व रेषा BD ह्या परस्परांना लंब आहेत. तर,

   $m\angle x =$ ———————

   $m\angle y =$ ———————

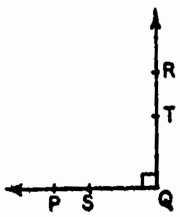
   $m\angle z =$ ———————

   $m\angle w =$ ———————



आ. 6·11

4. आकृती 6·12 मध्ये ∠ PQR हा काटकोन आहे. रेषा PQ व रेषा QR यांच्यापासून होणाऱ्या किरण, रेषाखंड इत्यादी भागांची परस्परांशी लंबता दाखवणारी सर्व विधाने लिहा.



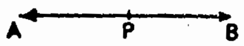
आ. 6·12

जसे; (i) रेषा PQ ⊥ रेषा QR

(ii) किरण QP ⊥ रेख QR इत्यादी.

त्याचप्रमाणे कोणते भाग परस्परांना लंब नाहीत ते सांगा.

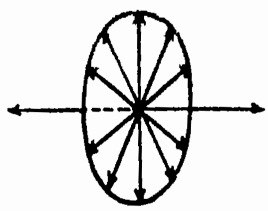
§ 6·4 आकृती 6·13 मध्ये रेषा AB दाखवली असून P हा तिच्यावरील कोणताही एक बिंदू आहे. रेषा AB ला P मध्ये छेदणाऱ्या किती रेषा अवकाशात असतील? अशा अनंत रेषा काढता येतात का?



आ. 6.13

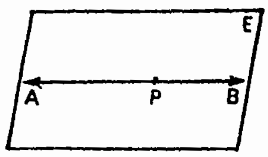
P मधून जाणाऱ्या या अनंत रेषा, रेषा AB ला P मध्ये छेदतील. या अनंत रेषांपैकी किती रेषा AB ला लंब असतील?

बैलगाडीच्या चाकाचेच उदाहरण घ्या. चाकांच्या आसाला लंब असलेले कितीतरी आरे चाकाला असतात (आ. 6·14). यावरून दिलेल्या रेषेला, तिच्यावरील दिलेल्या बिंदूत, असंख्य लंबरेषा अवकाशात असतात असे आपणास म्हणता येईल.



आ. 6·14

§ 6·5 आता आकृती 6·15 मध्ये दाखवलेली रेषा AB ही E या प्रतलात आहे असे समजा. या रेषेला P मध्ये लंब असणाऱ्या असंख्य रेषा अवकाशात आहेत, हे आपण वर पाहिलेच. त्या असंख्य रेषांपैकी एक तरी रेषा, E या दिलेल्या प्रतलात असते का? रेषा AB ला P मध्ये लंब असणाऱ्या जास्तीत जास्त किती रेषा E या प्रतलात असू शकतात?



आ. 6·15

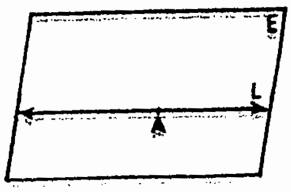
दोन रेषांच्या प्रतलातील लंबतेविषयीचा हा गुणधर्म प्रमेयाच्या स्वरूपात मांडून तो खाली सिद्ध करून दाखवला आहे.

§ 6·6 ▪ **प्रमेय : लंबरेषा रचनेचे पहिले प्रमेय**

दिलेल्या प्रतलातील, दिलेल्या रेषेवरील दिलेल्या बिंदूतून जाणारी व त्या रेषेला लंब असणारी त्या प्रतलात एक आणि एकच रेषा असते.

पक्ष : E या प्रतलात रेषा L असून तिच्यावर A हा बिंदू आहे.

(आ. 6·16)



आ. 6·16

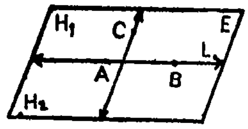
साध्य : रेषा L ला लंब असणारी व A मधून जाणारी E या प्रतलात,

(i) कमीत कमी एक तरी रेषा असते.

(ii) अशी लंब असणारी फक्त एकच रेषा असते.

सिद्धता :

(1) रेषा L मुळे E या प्रतलाचे H_1 आणि H_2 या दोन अर्धप्रतलात विभाजन झाले. रेषा L वर A खेरीज, B हा आणखी कोणताही एक बिंदू घ्या. कोनरचना गृहीतकानुसार H_1 या अर्धप्रतलात C हा बिंदू असा घेता येतो की, $m\angle BAC = 90$.



आ. 6·17

$\therefore$ रेषा AC $\perp$ रेषा AB

म्हणजेच रेषा L ला A मध्ये लंब असणारी किमान एकतरी रेषा E या प्रतलात काढता येते हे सिद्ध झाले.

(2) रेषा L ला लंब असलेल्या रेषेचे अस्तित्व आपण वर दाखवले. आता अशी फक्त एकच रेषा असते हे सिद्ध करू या. हे सिद्ध करण्यासाठी आपण अप्रत्यक्ष सिद्धता देऊ. रेषा L ला A मध्ये लंब असणारी E प्रतलात, रेषा AC व्यतिरिक्त दुसरी एक रेषा AD आहे असे समजा. या रेषा AD च्या बाबतीत दोन पर्याय संभवतात.

(a) D बिंदू H_1 या अर्धप्रतलात असेल आणि

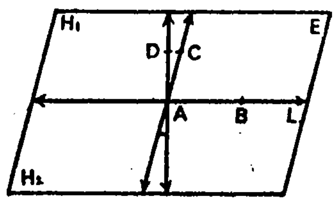
(b) D बिंदू H_2 या अर्धप्रतलात असेल.

कोणत्याही पर्यायात रेषा AC व रेषा AD या भिन्न नसतात असे आपण दाखवणार आहोत. (आ. 6·18).

(a) आता, D हा H_1 मध्ये असेल तर रेषा AD व रेषा AC या दोन्ही रेषा L रेषेला लंब असल्याने, $\angle BAD$ व $\angle BAC$ हे दोन्ही कोन काटकोन होतील.

$\therefore$ H_1 या अर्धप्रतलात $m\angle BAC = 90$

आणि $m\angle BAD = 90$

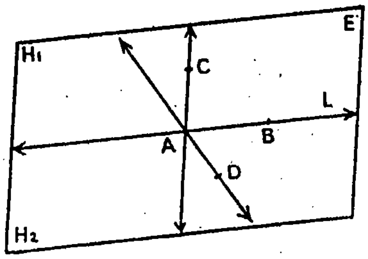


आ. 6·18

म्हणजे A पासून किरणAB शी कोटकोन करणारे, किरणAD व किरणAC हे दोन किरण H_1 या अर्धप्रतलात काढता येतात.

परंतु वरील विधान, कोनरचना गृहीतकाशी विसंगत आहे. कारण त्या गृहीतकानुसार रेषा AB शी A ठिकाणी कोटकोन करणारा फक्त एकच किरण (त्याचा अंत्य बिंदू सोडून) H_1 या अर्धप्रतलात काढता येतो. अर्थातच ही विसंगती आपण रेषा AB शी A बिंदूत लंब असणाऱ्या दोन रेषांचे अस्तित्व गृहीत धरल्यामुळे आली आहे.

म्हणून रेषा AC व रेषा AD या भिन्न नाहीत. म्हणजेच, L रेषेला A बिंदूत लंब असणारी, रेषा AC खेरील, दुसरी रेषा असणे शक्य नाही.



आ. 6·19

(b) आता दुसऱ्या पर्यायानुसार जर D बिंदू H_2 या अर्धप्रतलात असेल तर किरण AC व किरण AD हे L रेषेमुळे झालेल्या दोन वेगवेगळ्या अर्धप्रतलांत आहेत. त्यामुळे B बिंदू हा ∠CAD च्या अंतर्भागात राहील.

∴ कोनांच्या बेरजेच्या गृहीतकावरून,

$m\angle CAB + m\angle DAB = 90 + 90 = 180$ म्हणजेच किरण AC व किरण AD हे एकरेषीय आहेत. त्यामुळे रेषा AC व रेषा AD या भिन्न नसून एकच आहेत. इथे आपण रेषीय जोडीतील कोनांच्या गृहीतकाच्या व्यत्यासाचा आधार घेतला आहे.

(1) आणि (2) मधील निष्कर्षावरून आपणास असे सांगता येईल की E या प्रतलात L रेषेला A बिंदूत लंब असणारी एक आणि एकच रेषा असते.

टीप : या ठिकाणी D च्या स्थितीसंबंधी दोन पर्याय आपण विचारात घेतले व प्रत्येक पर्यायासाठी वेगळी सिद्धता दिली.

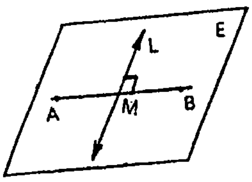
§ 6·7 रेषाखंडाची लंबदुभाजक रेषा (Perpendicular Bisector Line of a Segment) :

रेषाखंडाच्या दिलेल्या बिंदूतून जाणारी व त्या रेषाखंडाला लंब असणारी अशी एक रेषा असते. म्हणून त्या रेषाखंडाला असे अनंत लंब असू शकतात. त्यांपैकी रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूतून जाणाऱ्या लंबरेषेचे गुणधर्म महत्वाचे आहेत. या रेषेला **लंबदुभाजक रेषा** असे म्हणतात.

यापुढे, लंबदुभाजक रेषेला संक्षेपाने, आपण **लंबदुभाजक** म्हणणार आहोत.

व्याख्या : रेषाखंडाचा लंबदुभाजक

एखादया प्रतलातील दिलेल्या रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूतून जाणाऱ्या व रेषाखंडाला लंब असणाऱ्या त्या प्रतलातील रेषेला त्या रेषाखंडाचा त्या प्रतलातील लंबदुभाजक (perpendicular bisector) म्हणतात.

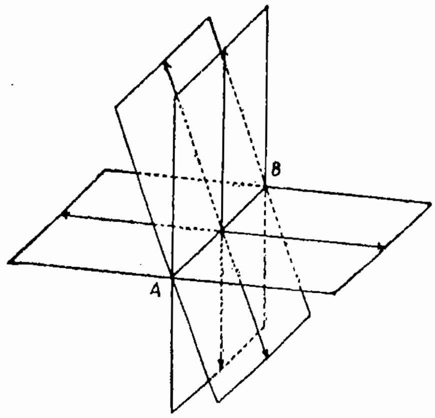


आ. 6·20

आकृती 6·20 मध्ये M हा बिंदू रेख AB चा मध्यबिंदू असून रेख AB ला M मध्ये लंब असलेली, E प्रतलात, रेषा L आहे. रेषा L ही रेख AB चा लंबदुभाजक आहे. प्रत्येक रेषाखंडाला एका प्रतलात किती लंबदुभाजक असतात? दिलेल्या रेषाखंडाचे अवकाशात किती लंबदुभाजक काढता येतील?

प्रत्येक रेषाखंडाला एकच मध्यबिंदु असतो हे आपणास माहीत आहे. तसेच, रेषाखंडाच्या कोणत्याही बिंदूतून रेषाखंडाला लंब असणारी, दिलेल्या प्रतलात एक आणि एकच रेषा असते हे देखील आपण लंबरेषा रचनेच्या पहिल्या प्रमेयात सिद्ध केले आहे. म्हणजेच कोणत्याही रेषाखंडाला सामावणाऱ्या प्रत्येक प्रतलात त्या रेषाखंडाचा एक आणि एकच लंबदुभाजक असतो हे उघड आहे.

आकृती 6·21 मध्ये रेख AB ला सामावणारी अनेक प्रतले दाखवली आहेत. प्रत्येक प्रतलात रेख AB चा एक लंबदुभाजक असेल. रेषाखंडाला सामावणारे प्रतल बदलले तर वेगळा लंबदुभाजक मिळतो. म्हणजे, रेषाखंडाला सामावणारी जितकी प्रतले अवकाशात असतील, तितके त्या रेषाखंडाचे वेगवेगळे लंबदुभाजक असतात. याचाच अर्थ, अवकाशात रेषाखंडाला अनेक लंब दुभाजक असतात. परंतु रेषाखंडाला समाविष्ट करणाऱ्या **दिलेल्या** प्रतलात त्या रेषाखंडाचा **एकच** लंबदुभाजक असतो.



आ. 6·21

रेषाखंडाच्या लंबदुभाजकाच्या काही गुणधर्मांचा विचार खालील प्रमेयात केला आहे.

§ 6·8 ▪ **लंबदुभाजकाचे प्रमेय :**

दिलेल्या प्रतलातील रेषाखंडाचा त्या प्रतलातील लंबदुभाजक हा, त्या रेषाखंडाच्या अंत्यबिंदूपासून समान अंतरावर असणाऱ्या, त्या प्रतलातील सर्व बिंदूंचा संच होय.

लंबदुभाजकासंबंधीच्या वरील प्रमेयात दोन महत्त्वाचे मुद्दे अंतर्भूत आहेत; ते लक्षात घेतले पाहिजेत.

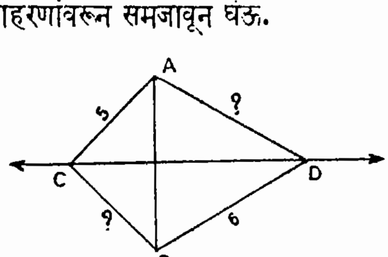
(1) रेषाखंडाच्या लंबदुभाजकावरील प्रत्येक बिंदू त्याच्या अंत्यबिंदूपासून समान अंतरावर असतो.

(2) दिलेल्या प्रतलातील जो बिंदू रेषाखंडाच्या अंत्यबिंदूपासून समान अंतरावर असेल तो प्रत्येक बिंदू त्या रेषाखंडाच्या (त्या प्रतलातील) लंबदुभाजकावर असतो.

संचांच्या परिभाषेत बोलायचे झाल्यास रेषाखंडाच्या अंत्यबिंदूपासून समान अंतरावरील बिंदूंच्या (त्या प्रतलातील) संचाला X म्हणू व लंबदुभाजकावरील बिंदूंच्या संचाला Y म्हणू. मग वरील मुद्दा (1) चा अर्थ, Y हा X चा उपसंच आहे, असा होतो व (2) चा अर्थ X हा Y चा उपसंच आहे असा होतो. म्हणूनच X आणि Y हे समान संच आहेत असे म्हणता येईल.

वरील चर्चेच्या अनुषंगाने प्रमेयात उल्लेखलेले गुणधर्म काही उदाहरणांवरून समजावून घेऊ.

उदा. 1 : आकृती 6·22 मध्ये रेषाखंड AB चा लंबदुभाजक, रेषा CD आहे. रेखAC व रेखBD यांची मापे अनुक्रमे 5 आणि 6 आहेत. वरील प्रमेयाच्या निष्कर्षावरून आपणास रेखAD व रेखCB यांची मापे चटकन कशी सांगता येतील ?

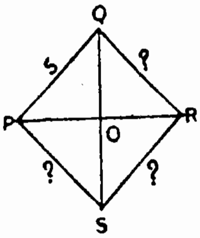


आ. 6·22

रेषा CD ही रेखABची लंबदुभाजक आहे. म्हणून वरील प्रमेयावरून रेषा CD वरील प्रत्येक बिंदू हा, A आणि B पासून समदूर असला पाहिजे.

अर्थातच, जर $l(BD)=6$ असेल तर $l(AD)=6$ असणारच. आणि $l(AC)=5$ असेल तर $l(CB)=?$ हे तुम्ही सहज सांगू शकाल.

उदा. 2 : आकृती 6·23 मध्ये रेषा PR ही रेख QS चा लंबदुभाजक आहे. तसेच रेषा QS ही रेख PR चा लंबदुभाजक आहे. रेखPQ ची लांबी 5 असेल तर रेख QR, रेख RS, रेखPS यांची लांबी किती होईल?



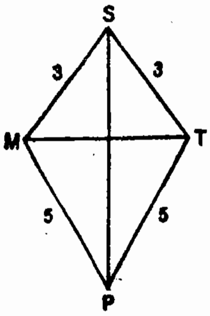
आ. 6·23

रेखQS ही रेखPR चा लंबदुभाजक आहे. म्हणून Q बिंदू, P आणि R पासून समदूर असेल.

$\therefore$ जर $l(PQ) = 5$ असेल तर $l(RQ) = 5$ होईल. तसेच रेषा PR ही रेख QS चा लंबदुभाजक आहे. म्हणून P बिंदू Q आणि S पासून समदूर असेल.

$\therefore$ $l(PQ) = 5$ असेल तर $l(PS) = 5$ होईल. तसेच $l(SR) = 5$ सांगता येईल.

$\therefore$ $l(PQ) = l(PS) = l(SR) = l(QR) = 5$.



आ. 6·24

उदा. 3 : आकृती 6·24 मध्ये $\triangle$ SMT व $\triangle$ PMT हे दोन समद्विभुज त्रिकोण असून ते एकाच प्रतलात आहेत. यावरून रेषा SP बद्दल काय सांगता येईल?

S हा बिंदू M आणि T पासून समदूर आहे. म्हणून तो रेखMT च्या लंबदुभाजकावर आहे. का? तसेच P हा बिंदू M आणि T पासून समदूर आहे. म्हणून तो देखील रेखMT च्या लंबदुभाजकावर आहे.

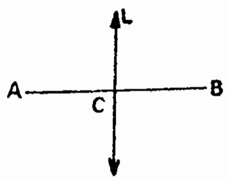
म्हणजेच, S आणि P हे दोन्ही बिंदू रेख MT च्या लंबदुभाजकावर असल्याने रेषा SP ही रेख MT चा लंबदुभाजक होईल.

आता आपण लंबदुभाजकाच्या प्रमेयाची सिद्धता पाहू.

§ 6·9 ▪ प्रमेय :

दिलेल्या प्रतलातील रेषाखंडाचा लंबदुभाजक हा त्या रेषाखंडाच्या अंत्यबिंदू-पासून समान अंतरावर असणाऱ्या त्या प्रतलातील सर्व बिंदूंचा संच होय.

पक्ष : समजा E प्रतलात रेख AB चा C हा मध्यबिंदू आहे. रेषा L ही रेख AB चा लंबदुभाजक आहे.

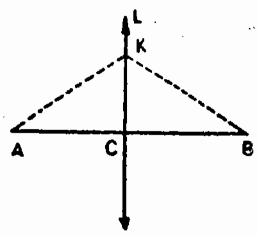


आ. 6·25

साध्य : (i) L रेषेवरील प्रत्येक बिंदू A आणि B पासून समदूर आहे. म्हणजेच K हा रेषा L वरील कोणताही बिंदू असेल तर $l(AK) = l(BK)$.

(ii) A आणि B पासून समदूर असलेले E प्रतलातील सर्व बिंदू L रेषेवर आहेत. म्हणजेच $l(AM) = l(BM)$ होईल असा, प्रतलातील M हा कोणताही बिंदू L रेषेवर असतो.

सिद्धता : (i) L रेषेवर कोणताही K बिंदू घ्या. जर K = C असेल तर C हा मध्यबिंदू असल्याने तो A व B पासून समदूर आहेच. आता K हा C खेरीज दुसरा कोणताही बिंदू आहे असे समजा.



आ. 6·26

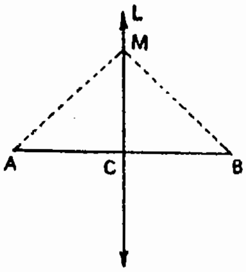
1. $\triangle$ ACK व $\triangle$ BCK हे त्रिकोण विचारात घ्या.
   बाजू AC $\cong$ बाजू BC
   बाजू KC $\cong$ बाजू KC
   $\angle$ ACK $\cong$ $\angle$ BCK......प्रत्येक कोन काटकोन
2. $\therefore$ $\triangle$ ACK $\cong$ $\triangle$ BCK...बाकोबा गृहीतक

3. ∴ बाजू AK ≅ बाजू BK......एकरूप त्रिकोणाच्या संगत बाजू.

4. ∴ K हा बिंदू A आणि B पासून समदूर आहे
आणि K हा L रेषेवरील कोणताही बिंदू आहे.

5. L रेषेवरील कोणताही बिंदू, A आणि B पासून समदूर असतो.

(ii) : आता A आणि B पासून समदूर असलेले व E प्रतलात असणारे सर्व बिंदू L रेषेवर आहेत हे आपणास सिद्ध करायचे आहे. त्यासाठी A आणि B पासून समदूर असलेला कोणताही बिंदू घेऊन तो रेषा L वर आहे हे सिद्ध केले की पुरे!



आ. 6·27

6. E या प्रतलात M हा बिंदू असा घ्या की, तो, A आणि B पासून समदूर राहील.

7. ∴ $l(AM) = l(BM)$ यात पुन्हा दोन पर्याय संभवतात. M बिंदू रेख AB वर असेल अथवा नसेल.

8. समजा M बिंदू रेख AB वर आहे. त्यावेळी M आणि C बिंदू एकच होत. म्हणून M हा बिंदू L या लंबदुभाजकावर राहील.

9. समजा M बिंदू रेख AB वर नाही. आपल्याला M हा लंबदुभाजकावर आहे हे दाखवायचे आहे. त्यासाठी रेषा MC ही रेख AB ला लंब आहे, हे दाखवणे पुरेसे होईल. कारण दिलेल्या रेषेला तिच्यावर दिलेल्या बिंदूतून दिलेल्या प्रतलात एकच लंब काढता येतो हे आपणास माहीत आहे.

10. आता △ ACM व △ BCM विचारात घ्या.
बाजू AM ≅ बाजू BM ... ... विधान 7
बाजू AC ≅ बाजू BC ... ... C हा मध्यबिंदू
बाजू CM ≅ बाजू CM

11. ∴ △ ACM ≅ △ BCM ... ... बाबाबा गृहीतक

12. ∴ ∠ ACM ≅ ∠ BCM ... ... एकरूप त्रिकोणांचे संगत कोन.

13. ∴ $m\angle ACM = m\angle BCM = 90$ एकरूप कोनांची रेषीय जोडी.

14. ∴ रेषा MC ⊥ रेख AB

15. म्हणजेच M बिंदू रेषा L या लंबदुभाजकावर आहे.

टीप : वरील प्रमेयाच्या दुसऱ्या भागात आपण हे सिद्ध केले आहे की, जर M हा बिंदू A आणि B पासून समदूर असेल तर तो रेख AB च्या लंबदुभाजकावर असतो. हे सिद्ध करताना आपण M च्या स्थितीला अनुसरून दोन पर्याय मांडले आहेत. एक म्हणजे M हा, रेषा AB वर असणे आणि दुसरा म्हणजे M हा, रेषा AB वर नसणे. या दोन पर्यायांपैकी पहिल्या पर्यायात सिद्धता सरळ होती—किंबहुना त्यात सिद्ध करण्यासारखे फारसे नव्हतेच! कारण M हा A आणि B यांच्यापासून समदूर असणे व त्याचवेळी तो रेख AB वर असणे; म्हणजे तो C पासून भिन्न असणार नाही. का?

दुसऱ्या पर्यायात आपण △ AMC व △ BMC हे एकरूप दाखवले. जर M हा बिंदू रेख AB वर असता तर △ AMC व △ BMC अस्तित्वातच आले नसते. परिणामी, दुसऱ्या पर्यायासारखी सिद्धता आपण पहिल्या पर्यायात वापरू शकलो नसतो.

सिद्धतेमध्ये अनेकदा असे पर्याय करून प्रत्येक पर्यायाची वेगळी सिद्धता द्यावी लागते. कारण प्रत्येक पर्यायाची परिस्थिती भिन्न असल्याने एका पर्यायाची सिद्धता दुसरीकडे लागू पडत नाही.

शिवाय सिद्धता देताना सर्व पर्यायांचा विचार झाला आहे किंवा नाही हेही पाहणे आवश्यक असते.

वरील सिद्धतेत M च्या स्थितीसंबंधी सर्व पर्यायांचा आपण विचार केला आहे का ?

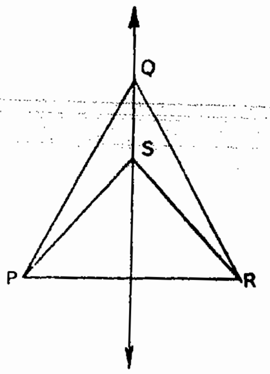
वर सांगितलेल्या लंबदुभाजकाच्या गुणधर्माचा आपणास पुढे बराच उपयोग करावा लागणार आहे. उदाहरणार्थ खालील विधाने पाहा.

1. समद्विभुज त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूतून पायावर काढलेला लंब पायास दुभागतो.
2. रेषाखंडाच्या लंबदुभाजकावरील कोणताही बिंदू रेषाखंडाच्या टोकांशी जोडून होणारा त्रिकोण समद्विभुज त्रिकोण असतो.

या विधानांची सत्यता रेषाखंडाच्या लंबदुभाजकाच्या गुणधर्मावरून आपणास लगेच मिळते.

§ 6·10 रेषाखंडाच्या लंबदुभाजकाचा आणखी एक गुणधर्म आपण आता पाहू.

खालील उदाहरण पाहा.



आ. 6·28

उदा. : आकृती 6·27 मध्ये △ PQR व △ PSR हे त्रिकोण एकाच प्रतलात असून बाजू PQ ≅ बाजू QR

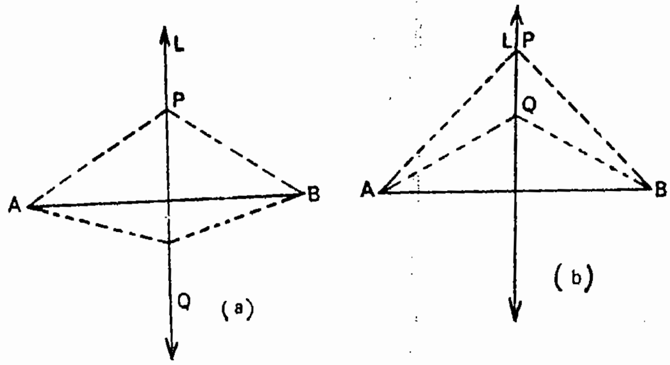
बाजू PS ≅ बाजू SR

तर रेषा QS बद्दल काय सांगता येईल ?

$l(PQ) = l(QR)$ आणि

$l(PS) = l(SR)$ असल्याने Q आणि S हे दोन्ही बिंदू P आणि R पासून समदूर आहेत. लंबदुभाजकाच्या प्रमेयानुसार, Q आणि S हे बिंदू रेख PR च्या लंबदुभाजकावर आहेत. म्हणजेच, रेषा QS ही रेख PR चा लंबदुभाजक होईल.

कागदावर कोणतेही रेषाखंड AB काढा. या रेषाखंडाच्या A आणि B या टोकांपासून समदूर असलेले कोणतेही दोन बिंदू घ्या (आ. 6·29). समजा हे बिंदू P आणि Q आहेत. P व Q या बिंदूंनी निश्चित केलेली रेषा काढा. तिला L म्हणू. म्हणजे L रेषेवरील P आणि Q हे बिंदू A आणि B पासून समदूर आहेत. रेख AB व रेषा L यांचा परस्परांशी काय संबंध आढळतो ?



आ. 6·29

रेषा L ही रेख AB ला त्याच्या कोणत्या बिंदूत छेदते ?

ती रेख AB शी कोणत्या मापाचा कोन करीत असावी ?

मागील प्रमेयाच्या आधारे विचार करून याचे उत्तर तुम्ही सहज देऊ शकाल का ?

वरील चर्चेचा निष्कर्ष उपप्रमेयाच्या स्वरूपात पुढे मांडला आहे.

§ 6·11 **उपप्रमेय :**

एकाच प्रतलात रेषाखंड AB व रेषा L असून, जर रेषा L वरील कोणतेही दोन भिन्न बिंदू हे A आणि B पासून समदूर असतील तर रेषा L ही, रेख AB चा लंबदुभाजक असते.

तत्वतः या उपप्रमेयात नवे असे काही नाही. मागे सिद्ध केलेले लंबदुभाजकाचे प्रमेयच आपण वेगळ्या भाषेत मांडले आहे. गणितात आपणास अनेक वेळा अशा प्रकारे एकाच विधानाचा विचार त्याच्या अनेक रूपात करावा लागतो. कारण निरनिराळ्या परिस्थितीत निरनिराळी रूपे चटकन उपयोगी पडतात.

लंबदुभाजकाच्या प्रमेयाची वरील उपप्रमेयासारखी आणखी काही रूपे खाली लिहून दाखवली आहेत.

(1) रेषाखंड AB च्या अंत्यबिंदूपासून त्याला सामावणाऱ्या कोणत्याही E प्रतलातील P आणि Q हे बिंदू समदूर असतील तर रेषा PQ ही रेख AB चा E प्रतलातील लंबदुभाजक असते.

(2) रेषा L वरील कोणतेही दोन बिंदू तिला सामावणाऱ्या कोणत्याही E प्रतलातील A आणि B बिंदूपासून समदूर असतील तर L वरील प्रत्येक बिंदू A आणि B पासून समदूर असतो.

(3) जर दिलेल्या रेषेवरील एक बिंदू, दिलेल्या रेषाखंडाच्या अंत्यबिंदूपासून समदूर असेल व दिलेली रेषा त्या रेषाखंडाला लंब असेल तर, त्या रेषेवरील प्रत्येक बिंदू, रेषाखंडाच्या अंत्यबिंदूपासून समदूर असतो. (ती रेषा त्या रेषाखंडाची लंबदुभाजक असते.)

(4) दिलेली रेषा दिलेल्या रेषाखंडास लंब आहे. या रेषेवरील एक जरी बिंदू रेषाखंडाच्या अंत्यबिंदूपासून समदूर नाही असे आढळून आले, तर त्या रेषेचा कोणताही बिंदू रेषाखंडाच्या अंत्यबिंदूपासून समदूर असू शकणार नाही.

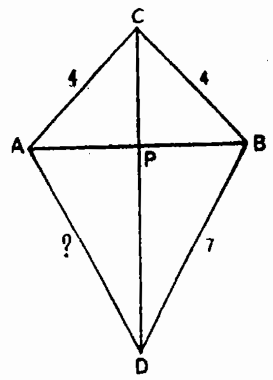
(5) एक रेषा दिलेल्या रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूतून जाते. या मध्यबिंदूखेरीज दुसरा कोणताही बिंदू त्या रेषाखंडाच्या अंत्यबिंदूपासून समदूर असेल (नसेल) तर ती रेषा त्या रेषाखंडाला लंब असते (नसते).

§ 6·12 एकाच प्रमेयाची ही वेगवेगळी रूपे वेगवेगळ्या परिस्थितीत कशी उपयोगात आणता येतात, हे खालील उदाहरणांवरून स्पष्ट होईल.

उदा. 1 : आकृती 6·30 मधील चौकोन ACBD च्या तीन बाजूंची मापे अनुक्रमे 4, 4 व 7 आहेत. त्याचा कर्ण, रेख AB हा P मध्ये दुभागला जातो. तर रेख AD ची लांबी किती असेल ?

P हा रेख AB चा मध्यबिंदू आहे व C हा A आणि B पासून समदूर आहे. म्हणून उपप्रमेय 6·11 च्या (5) व्या रूपानुसार रेषा CP ही, रेख AB चा लंबदुभाजक आहे. आणि D बिंदू हा ह्या लंबदुभाजकावर असल्याने मूळ प्रमेयानुसार तो A आणि B पासून समदूर आहे.

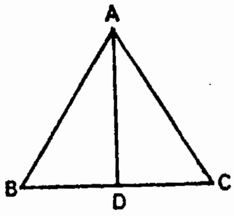
∴ जर l (BD) = 7 असेल तर l (AD) = 7 राहील.



आ. 6·30

उदा. 2 : समद्विभुज त्रिकोणाचा शिरोबिंदू व पायाचा मध्यबिंदू यांना जोडणारा रेषाखंड पायाला लंब असतो हे सिद्ध करा.

या विधानाची सिद्धता खाली दिली आहे. सिद्धतेत काही जागा रिकाम्या सोडल्या आहेत, तेथे योग्य शब्द भरून सिद्धता पूर्ण करा.



आ. 6·31

पक्ष : △ ABC हा समद्विभुज त्रिकोण आहे. D हा रेख BC चा मध्यबिंदू आहे.

साध्य : रेख AD ⊥ रेख BC

सिद्धता : त्रिकोण ABC हा ________ त्रिकोण आहे.

∴ बाजू AB ≅ बाजू ________

∴ $l(AB) =$ ________

तसेच D हा रेख BC चा ________ आहे.

∴ ________ $= l(DC)$

आता A आणि D हे बिंदू B आगि C पासून समदूर आहेत.

∴ वरील उपप्रमेयानुसार रेषा AD ही रेख BC चा ________ आहे.

∴ ________ ⊥ ________

§ 6·13 प्रश्न :

1. खालीलपैकी कोणती विधाने सत्य व कोणती असत्य आहेत ते सांगा.

   (i) रेषा L व तिच्यावरील P बिंदू यांच्या मधून जाणाऱ्या कोणत्याही प्रतलात P बिंदूतून जाणारी व L रेषेला लंब असणारी एक आणि एकच रेषा काढता येते.

   (ii) रेषाखंडाचा लंबदुभाजक हा त्या रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूतून जातो.

   (iii) रेषा L वर P बिंदू असेल तर, L रेषेला P बिंदूत लंब असणारी अवकाशात फक्त एकच रेषा काढता येते.

   (iv) दिलेल्या रेषेवरील एक बिंदू दिलेल्या रेषाखंडाच्या अंत्यबिंदूपासून समदूर असेल आणि ती रेषा, त्या रेषाखंडास लंब नसेल तर तिच्यावरील दुसरा कोणताही बिंदू, त्या रेषाखंडाच्या अंत्यबिंदूपासून समदूर असू शकणार नाही.

   (v) प्रतलातील रेषाखंडाच्या अंत्यबिंदूपासून समदूर पण त्या रेषाखंडाच्या लंबदुभाजकावर नसलेले काही बिंदू त्या प्रतलात असतात.

   (vi) प्रतलात दिलेल्या दोन बिंदूपैकी कोणताही एक बिंदू, जर दिलेल्या रेषाखंडाच्या टोकांपासून समदूर असेल, तर त्या दोन बिंदूतून जाणारी रेषा, त्या रेषाखंडाचा लंबदुभाजक असते.

   (vii) दिलेल्या रेषाखंडाला लंब असणाऱ्या रेषेचे सर्व बिंदू त्या रेषाखंडाच्या अंत्यबिंदूपासून एक तर समदूर असतील किंवा रेषेचा एकही बिंदू समदूर असणार नाही.

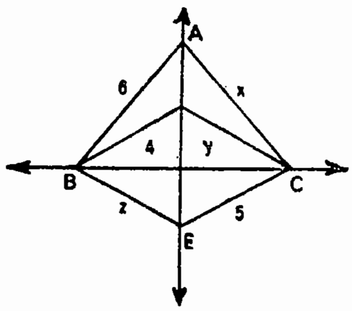
(viii) प्रतलातील रेषाखंडाच्या लंबदुभाजकावर असलेले पण रेषाखंडाच्या अंत्यबिंदूपासून समदूर नसलेले काही बिंदू त्या प्रतलात असतात.

(ix) कोणताही बिंदू एखादया रेषाखंडाच्या लंबदुभाजकावर असण्यासाठी तो, त्या रेषाखंडाच्या अंत्यबिंदूपासून समदूर असलाच पाहिजे, असे नाही.

(x) एक रेषा दिलेल्या रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूतून जाते. या मध्यबिंदूखेरीज रेषेवरील दुसरा कोणताही बिंदू त्या रेषाखंडाच्या अंत्यबिंदूपासून समदूर नसेल, तर ती रेषा त्या रेषाखंडाला लंब नसते.

2. रिकाम्या जागी योग्य शब्द भरून खालील विधाने पूर्ण करा.

(i) जेव्हा B आणि C बिंदू A पासून समदूर असतात तेव्हा A बिंदू रेषाखंड BC च्या ________ वर असतो.



आ. 6·32

(ii) आकृतीत रेख AE ⊥ रेख BC आणि $x=6$ असेल तर,

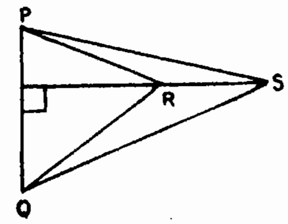
$y=$ ____, $z=$ ____

वर दिलेल्या पर्यायांपैकी कोणत्या पर्यायाचा आधार आपण y व z यांच्या किंमती काढण्यासाठी घेतला ?

(iii) A आणि B हे बिंदू प्रत्येकी C आणि D पासून समदूर आहेत. म्हणून रेषा ________ ही रेख ________ चा लंबदुभाजक होईल.

(iv) आकृती 6·33 मध्ये एकाच प्रतलात असलेले दोन विषमभुज त्रिकोण रेख PQ या एकाच पायावर दाखवले असून

रेषा SR ⊥ रेषा PQ तर,



आ. 6·33

(a) रेषा SR ही रेख PQ च्या मध्यबिंदूतून ________ (जाते / जात नाही)

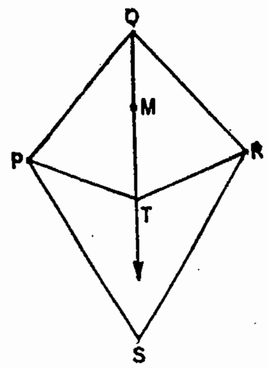
(b) रेषा SR वरील प्रत्येक बिंदू P आणि Q पासून समदूर ________ (असतो / नसतो)

(v) आकृती 6·34 मधील सर्व बिंदू एकप्रतलीय असून

$l(PQ)=l(RQ)$

$l(PT)=l(RT)$

$l(PS)=l(RS)$ तर

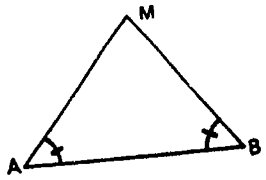


आ. 6·34

(a) रेषा QT ही S मधून ________ (जाईल/जाणार नाही)

(b) जर $l(PM)\neq 5$ तर $l(RM)=5$ ________ (आहे / नाही)

3. समद्वित्रिभुज कोणाच्या शिरोकोनाचा दुभाजक हा पायाचा लंबदुभाजक असतो हे सिद्ध करा.

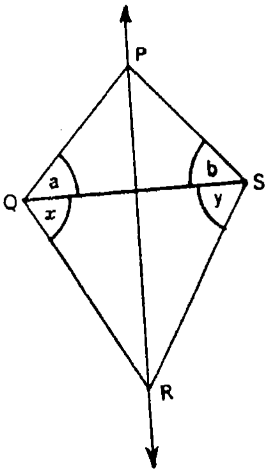


आ. 6·35

4. △ MAB मध्ये (आ. 6·35)

∠ MAB ≅ ∠ MBA.

तर M बिंदू रेख AB च्या लंबदुभाजकावर आहे हे सिद्ध करा.



आ. 6·36

5. आ. 6·36 मध्ये,

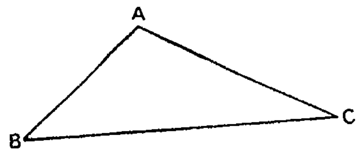
$\angle a \cong \angle b$ आणि

$\angle x \cong \angle y$

तर, रेषा PR ही QS चा लंबदुभाजक आहे, हे सिद्ध करा.

6. खाली एक विधान दिले असून त्याची सिद्धता मांडताना काही जागा रिकाम्या सोडल्या आहेत. त्या जागी योग्य शब्द भरून सिद्धता पूर्ण करा. प्रत्येक पायरीला कारण दया.

विषमभुज त्रिकोणाच्या कोणत्याही बाजूचा लंबदुभाजक त्याच्या समोरील शिरोबिंदूतून जात नाही.



आ. 6·37

पक्ष : △ ABC हा ______ त्रिकोण आहे (आ.6·37).

साध्य : रेख BC चा लंबदुभाजक ______ मधून जात नाही.

सिद्धता : समजा रेख BC चा लंबदुभाजक A मधून जातो.

∴ A बिंदू रेख BC च्या ______ वर आहे.

∴ A हा ______ आणि ______ पासून समदूर आहे.

म्हणजेत l(AB) = ______

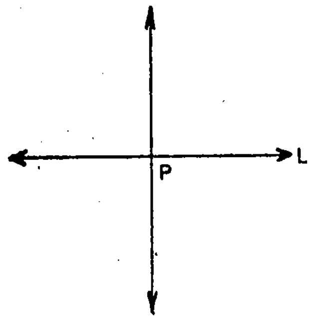
∴ △ ABC हा ______ त्रिकोण आहे. परंतु ______ शी हे विसंगत आहे. कारण,

त्रिकोण ABC हा ______ त्रिकोण दिला आहे. म्हणून ______ हे सिद्ध झाले.

त्याचप्रमाणे इतर बाजूंचे लंबदुभाजक त्यांच्या समोरील शिरोबिंदूतून जात नाही, हे दाखवता येईल. इथे आपण सिद्धतेचा कोणता प्रकार वापरला आहे ?

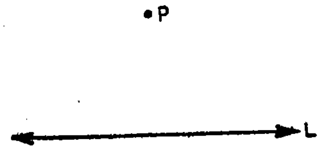
7. विषमभुज त्रिकोणाचा कोणताही शिरोबिंदू व त्याच्या समोरील बाजूचा मध्यबिंदू जोडणारी रेषा त्या बाजूला लंब नसते, हे सिद्ध करा.

§ **6·14** एखादया प्रतलात रेषा L दिली असून तिच्यात P हा बिंदू दिला असेल तर P मधून जाणारी व L रेषेला लंब असणारी एक आणि एकच रेषा त्या प्रतलात असते हे आपण पाहिले. आता P बिंदू L रेषेबाहेर असेल तर P बिंदूतून जाणारी व L रेषेला लंब असणारी एक आणि एकच रेषा त्या प्रतलात असते असे म्हणता येईल का ?



आ. 6·38

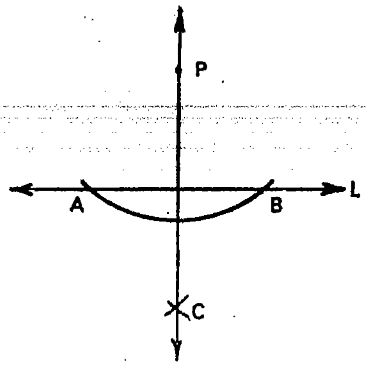
आकृती 6·39 मध्ये रेषा L दाखवली असून तिच्या बाहेर कागदाच्याच प्रतलात P बिंदू दाखवला आहे. P मधून L रेषेला लंबरेषा काढता येईल का ? काढता येत असल्यास किती लंबरेषा काढता येतील ?



आ. 6·39

आठव्या वर्गाच्या अभ्यासात, दिलेल्या रेषेवर तिच्या बाहेरील बिंदूपासून लंब काढण्याची रचना तुम्ही केली आहे. तिची पुन्हा थोडक्यात उजळणी करू.

L रेषेवर तिच्या बाहेरील P बिंदूतून लंब काढण्यासाठी, P मध्य कल्पून व सोईस्कर त्रिज्या घेऊन L रेषेला A आणि B बिंदूमध्ये छेदणारा चाप काढा. आता A आणि B मध्य कल्पून आणि रेख AB च्या लांबीच्या निम्म्यापेक्षा जास्त त्रिज्येचे रेषा AB च्या ज्या बाजूस P नाही त्या बाजूस एकमेकांस C मध्ये छेदणारे चाप काढा (आ. 6·40). रेषा PC ही आपणास हवी असलेली रेषा होय.



आ. 6·40

आता या रचनेचे थोडे स्पष्टीकरण पाहू. P बिंदू मध्य कल्पून काढलेला चाप L रेषेला A आणि B मध्ये छेदतो. म्हणजेच, P हा बिंदू A आणि B पासून समदूर आहे. तसेच A आणि B पासून सारख्या त्रिज्येने काढलेले कंस एकमेकांस C मध्ये छेदतात.

म्हणजेच, C हा A आणि B पासून समदूर आहे. आता P आणि C बिंदू हे प्रत्येकी A आणि B पासून समदूर आहेत. म्हणून लंबदुभाजकाच्या प्रमेयावरून, रेषा PC ही, रेख AB चा लंबदुभाजक राहील.

म्हणजेच, रेषा PC ही L रेषेला लंब असेल.

अशा प्रकारे, L रेषेबाहेर P बिंदू कोठेही घेतला तरी त्याच्यामधून जाणारी व L रेषेला लंब असणारी एक तरी रेषा आपण दाखवू शकतो. तसेच, अशी फक्त एकच रेषा असते हे प्रमेयांच्या व गृहीतकांच्या आधारे सिद्ध करता येते.

वरील चर्चेचा सारांश पुढील पृष्ठावर प्रमेयाच्या रूपात मांडला असून ते प्रमेय सिद्ध केले आहे.

§ 6·15 ■ लंबरेषा रचनेचे दुसरे प्रमेय :

एक रेषा व तिच्या बाहेरील बिंदू दिला असेल तर त्या बिंदूतून जाणारी व त्या दिलेल्या रेषेला लंब असणारी एक व एकच रेषा असते.

या प्रमेयातही आपणास दोन गोष्टी सिद्ध करावयाच्या आहेत.

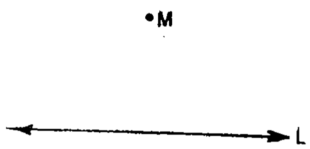
(i) एक रेषा व तिच्या बाहेरील बिंदू दिला असेल तर त्या बिंदूतून जाणारी व त्या रेषेला लंब असणारी कमीतकमी एक रेषा असते (लंबरेषेचे अस्तित्व).

(ii) अशी केवळ एकच रेषा असते (लंबरेषेचे एकमेवत्व).

लंबरेषा रचनेचे पहिले प्रमेय व वर सांगितलेले लंबरेषा रचनेचे दुसरे प्रमेय यांची तुलना करा. एक रेषा व एक बिंदू दोघांतही आहेतच. पहिल्या प्रमेयात लंबाच्या एकमेवतेची ग्वाही आहे तशीच दुसऱ्यातही आहे. पहिल्या प्रमेयात अशी ग्वाही एका प्रतलाच्या संदर्भातच देता आली. या दुसऱ्या प्रमेयात ती ग्वाही देताना प्रतलाच्या उल्लेखाची गरज पडली नाही. कारण ?

पहिल्या प्रमेयात दिलेला बिंदू दिलेल्या रेषेवर होता. दुसऱ्यात तो बिंदू दिलेल्या रेषेबाहेर आहे, एका रेषेतून असंख्य प्रतले जातात. म्हणून अशा प्रत्येक प्रतलात अशी लंबरेषा असते हे प्रमेयात स्पष्टपणे सांगावे लागले.

रेषा व एक बाह्यबिंदू यांतून एक व एकच प्रतल जात असल्यामुळे त्या बाह्यबिंदूत दिलेल्या रेषेला लंब असणारी रेषा त्या प्रतलातच असली पाहिजे. म्हणून या प्रमेयात त्या प्रतलाचा उल्लेख करण्याची गरज भासली नाही.

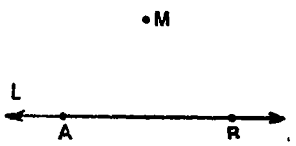


आ. 6·41

पक्ष : रेषा L ही दिलेली रेषा असून M तिच्या बाहेरील बिंदू आहे.

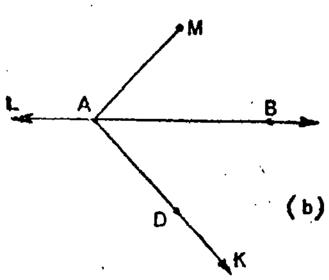
साध्य : (i) M मधून जाणारी L रेषेला लंब असणारी किमान एक तरी रेषा असते.

(ii) M मधून जाणारी व L रेषेला लंब असणारी **फक्त एकच रेषा असते.**



(a)

आ. 6·42



(b)

आ. 6·42

सिद्धता : (i)

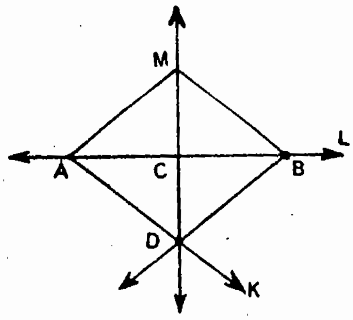
1. L रेषेवर A आणि B हे बिंदू घ्या.
2. L रेषेच्या ज्या बाजूस M आहे त्याच्या विरुद्ध बाजूस किरण AK असा काढा की, $m\angle BAM = m\angle BAK$
3. किरण AK वर D बिंदू असा घ्या की $l(AM) = l(AD)$

4. आता रेषा MD ही रेषा AB ला लंब आहे हे दाखवू. त्यासाठी आपणास △ AMB व △ ADB एकरूप दाखवावे लागतील.

बाजू AM ≅ बाजू AD ......विधान 3

बाजू AB ≅ बाजू AB

∠ MAB ≅ ∠ DAB ......विधान 2



आ. 6·43

5. ∴ △ AMB ≅ △ ADB ...... बाकोबा गृहीतक.

6. ∴ बाजू MB ≅ बाजू DB ...... एकरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू एकरूप.

7. ∴ A आणि B बिंदू हे M आणि D बिंदूपासून समदूर आहेत.

8. ∴ रेषाAB ही, रेख MD चा लंबदुभाजक आहे ...... लंबदुभाजाच्या प्रमेयाचे उपप्रमेय.

9. ∴ रेषा MD ⊥ रेषा AB.

म्हणजेच, L रेषेला लंब असणारी व M मधून जाणारी कमीत कमी एक तरी रेषा असतेच.

रेषेबाहेरील बिंदूतून, त्या रेषेला लंब असणारी एकतरी रेषा असते हे आपण दाखवले. आता अशी फक्त एकच रेषा असते हे आपणास दाखवायचे आहे. अशा प्रकारच्या, एकापेक्षा जास्त लंबरेषा असू शकतात, असे गृहीत धरून त्यात विसंगती दाखवून आपणास हे सिद्ध करता येईल. असे गृहीत धरल्याने जर विसंगती निर्माण होत असेल तर आपल्याला जे म्हणायचे आहे ते सिद्ध झाले असे होईल.

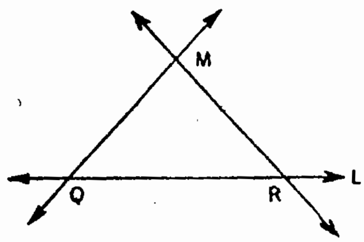
(ii) :

L रेषेबाहेरील M बिंदूतून रेषा MQ व रेषा MR या दोन रेषा L रेषेवर लंब आहेत असे समजा (आ. 6·44)

△ MQR विचारात घ्या.

रेषा MQ ⊥ रेषा L आणि रेषा MR ⊥ रेषा L

∴ △ MQR मध्ये $m\angle MQR = 90$ व $m\angle MRQ = 90$.



आ. 6·44

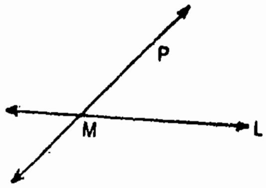
परंतु 'कोणत्याच त्रिकोणाचे दोन कोन काटकोन नसतात', या उपप्रमेयाशी वरील विधान विसंगत आहे.

ही विसंगती, M पासून L रेषेवर एकापेक्षा जास्त लंबरेषा असू शकतात हे गृहीत धरल्यामुळे आली आहे.

म्हणून, रेषा L बाहेरील M बिंदूतून रेषा L वर लंब असलेली केवळ एकच रेषा असते.

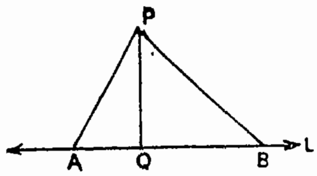
§ 6·16 बिंदूपासून रेषेपर्यंतचे रेषाखंड :

आकृती 6·45 मध्ये रेषा L दिली असून तिच्या बाहेर P बिंदू दिला आहे. L रेषेला छेदणारी व P मधून जाणारी, रेषा PM ही कोणतीही रेषा आहे. या रेषेचा एक भाग-रेषाखंड PM विचारात घ्या. हा रेषाखंड म्हणजे दिलेला P बिंदू व दिलेल्या रेषेवरील एक बिंदू हे ज्याचे अंत्यबिंदू आहेत असा रेषाखंड होय (आ. 6·45). अशा रेषाखंडाला **रेषेबाहेरील दिलेल्या बिंदूपासून दिलेल्या रेषेपर्यंत काढलेला रेषाखंड** म्हणण्याचा प्रघात आहे.

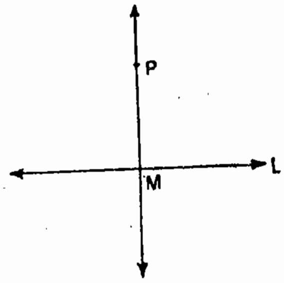


आ. 6·45

बाजूच्या आकृतीत रेख PA, रेख PB व रेख PQ हे L रेषेबाहेर दिलेल्या P बिंदूपासून L रेषेपर्यंत काढलेले रेषाखंड होत.

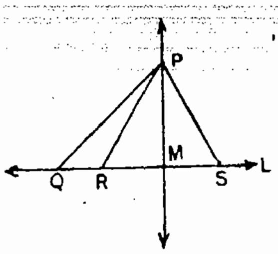


आ. 6·46



आ. 6·47

त्याचप्रमाणे P बिंदूपासून L रेषेपर्यंत काढलेला एखादा रेषाखंड हा, P बिंदूतून रेषा L वर काढलेल्या लंबरेषेचा एक भाग असेल तर त्या रेषाखंडाला P पासून रेषा L वर काढलेला लंब रेषाखंड असे म्हणण्याचा प्रघात आहे. आकृती 6·47 मध्ये रेख PM हा P पासून रेषा L वर काढलेला **लंबरेषाखंड** होईल. कारण रेख PM हा रेषा L ला लंब असणाऱ्या लंबरेषेचा एक भाग आहे.



आ. 6·48

§ 6·17 : आकृती 6·48 मध्ये P पासून रेषा L पर्यंत काढलेला लंबरेषाखंड PM आहे. रेषा L वर M खेरीज Q, R, S...इत्यादी बिंदू घ्या. ह्या बिंदूमुळे △ PMQ, △ PMR, △ PMS इत्यादी काटकोन त्रिकोण तयार होतील. यांपैकी कोणताही त्रिकोण—समजा, त्रिकोण PMR हा काटकोन त्रिकोण—विचारात घेऊ. यांमधील रेख PM व रेख PR यांपैकी कोणता रेषाखंड मोठा आहे ?

आपणास हे माहीत आहे की काटकोन त्रिकोणात कर्ण हा इतर दोन बाजूंपेक्षा मोठा असतो. म्हणून रेख PM हा रेख PR पेक्षा लहान राहील.

म्हणजेच $l(\text{PM}) < l(\text{PR})$

इतर कोणत्याही त्रिकोणांचा विचार केल्यास आपणास हे सांगता येईल की रेख PM हा रेख PQ, रेख PS इत्यादी रेषाखंडांपेक्षा लहान आहे.

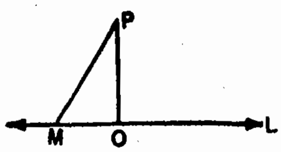
या चर्चेचा सारांश खालील प्रमेयात सांगितला आहे.

§ 6·18 ■ लघुतम रेषाखंडाचे पहिले प्रमेय :

दिलेल्या रेषेबाहेरील बिंदूपासून त्या रेषेपर्यंत काढलेल्या रेषाखंडांपैकी त्या रेषेला लंब असलेला रेषाखंड सर्वांत लहान असतो.

वर केलेल्या चर्चेच्या अनुरोधाने पुढील सिद्धतेतील रिकाम्या जागी योग्य शब्द भरून सिद्धता पूर्ण करा.

पक्ष : रेषा L ही दिलेली रेषा असून P हा तिच्या बाहेरील बिंदू आहे. रेख PO ⊥ रेषा L आहे. M हा रेषा L वर O खेरीज दुसरा कोणताही बिंदू आहे.



आ. 6·49

साध्य : ———— < l(PM)

सिद्धता : ———— ⊥ रेषा L ————:········पक्ष.

∴ $m\angle$ POM = ————

∴ △ POM ———— त्रिकोण आहे.

△ POM चा कर्ण, रेख ———— आहे.

आणि त्याच्या इतर बाजू ———— आणि ———— आहेत.

काटकोन त्रिकोणात कर्ण हा इतर बाजूंपेक्षा ———— (लहान/मोठा) असतो.

म्हणजे काटकोन त्रिकोणात कर्णाखेरीज इतर बाजू कर्णापेक्षा ———— (लहान/मोठी) असते.

∴ l(PO) < l(PM)

M हा एक बिंदू घेऊन त्यावरून आपण रेख PO हा रेख PM पेक्षा लहान आहे हे सिद्ध केले. पण M हा कोणताही बिंदू घेतला तरी l(PO) < l(PM) असेच मिळेल. म्हणून रेख PO हा अशा सर्व रेषाखंडांपेक्षा लहान आहे हे सिद्ध झाले असे म्हणता येते.

§ 6·19 ▪ लघुतम रेषाखंडाचे दुसरे प्रमेय :

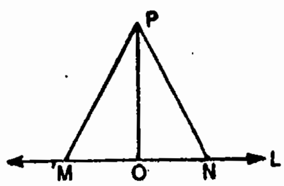
दिलेल्या रेषेबाहेरील बिंदूपासून त्या रेषेपर्यंत काढलेल्या रेषाखंडांपैकी सर्वांत लहान असलेला रेषाखंड त्या रेषेला लंब असतो.

व्यत्यासाची सिद्धता ध्यानात येण्यासाठी खालील प्रश्नांची उत्तरे दया :

1. दिलेला सर्वांत लहान रेषाखंड लंब नसेल तर दुसरा एखादा रेषाखंड लंब असू शकेल का?
2. कोणत्या प्रमेयानुसार अशा एका तरी लंबरेषेचे अस्तित्व सांगता येते?
3. जर दुसरा एखादा लंब रेषाखंड अस्तित्वात असेल तर त्याच्या लांबीचा इतर रेषाखंडाच्या लांबीशी काय संबंध असेल?
4. हा लंबरेषाखंड सर्वांत लहान रेषाखंड असेल काय? असल्यास कोणत्या प्रमेयानुसार?
5. आणि, आपणास दिलेला रेषाखंड हाच जर सर्व रेषाखंडांत लहान असेल तर त्याच्या रेषेवरील लंबत्वाबद्दल काय सांगता येईल?

आता व्यत्यासाच्या खाली दिलेल्या सिद्धतेचा अभ्यास करा.

पक्ष : रेषा L ही दिलेली रेषा असून P हा तिच्या बाहेरील एक बिंदू आहे. L रेषेपर्यंत काढलेल्या सर्व रेषाखंडांत रेख PO हा सर्वांत लहान आहे. म्हणजेच M हा L रेषेवर दुसरा कोणताही बिंदू असेल तर l(PO) < l(PM)



आ. 6·50

साध्य : रेख PO ⊥ रेषा L

सिद्धता : या ठिकाणी दोनच पर्याय असू शकतात.

रेख PO ⊥ रेषा L असेल किंवा नसेल.

रेख PO ⊥ रेषा L नाही असे गृहीत धरू.

P बिंदूतून रेषा L वर लंबरेषा काढता येते.

तसेच P बिंदूपासून रेषा L वर अनेक रेषाखंड काढता येतात.

रेषा L वरील लंबरेषाखंड हा अशा अनेक रेषाखंडांपैकी एक असला पाहिजे.

समजा रेख PS हा तो लंबरेषाखंड आहे.

हा लंबरेषाखंड विचारात घेतल्यास लघुतम रेषाखंडाच्या पहिल्या प्रमेयानुसार तो सर्वात लहान रेषाखंड होईल.

म्हणजेच रेख PS हा रेख PO पेक्षाही लहान होईल. परंतु रेख PO हाच सर्वात लहान रेषाखंड दिला असल्याने त्याच्यापेक्षा दुसरा लहान रेषाखंड असणे शक्य नाही.

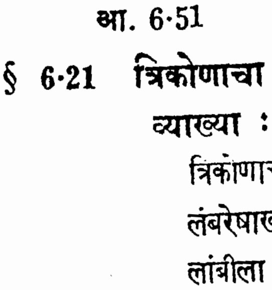
∴ रेख PO हा L रेषेवर लंब नाही हे जे आपण गृहीत धरले ते चूक आहे.

∴ रेख PO ही L रेषेवर लंब आहे.

§ 6·20 व्याख्या :

रेषेबाहेरील बिंदूतून त्या रेषेपर्यंत काढलेल्या लंबरेषाखंडाला त्या रेषेवर त्या बिंदूपासून काढलेला **लंब** (Perpendicular) म्हणतात. या लंबाच्या त्या बिंदूचे त्या रेषेपासूनचे **अंतर** (Distance) म्हणतात.

यावरून आपल्या ध्यानात येईल की एखादया रेषेबाहेरील बिंदूपासून त्या रेषेवर काढलेला लंब हा एक रेषाखंड असतो. आणि ह्या रेषाखंडाची लांबी म्हणजेच त्या बिंदूचे त्या रेषेपासूनचे अंतर असते.



आ. 6·51

उदाहरणार्थ, आ. 6·51 मध्ये L रेषेवर P पासून काढलेला रेख PQ हा **लंब** आहे. या लंबाचे माप 4 सेमी. आहे. म्हणून P बिंदूचे L रेषेपासूनचे अंतर 4 सेमी. होईल.

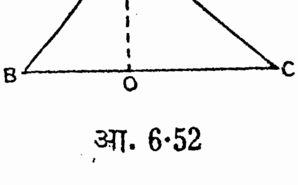
रेषेबाहेरील बिंदूपासून रेषेवर काढलेला लंब रेषेला ज्या बिंदूत मिळतो त्या बिंदूला त्या लंबाचा **पाद** (Foot) म्हणतात.

उदाहरणार्थ आ. 6·51 मध्ये लंब PQ चा Q हा पाद आहे.

§ 6·21 त्रिकोणाचा शिरोलंब (Altitude of a Triangle):

व्याख्या :

त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूतून, त्यांची समोरील बाजू समाविष्ट करणाऱ्या रेषेवर काढलेल्या लंबरेषाखंडास त्या त्रिकोणाचा **शिरोलंब** (Altitude) म्हणतात. या शिरोलंबाच्या लांबीला त्या त्रिकोणाची **उंची** (Height) म्हणतात. तसेच या लांबीला त्या शिरोबिंदूची **त्याच्या समोरील बाजूपासूनची उंची** असेही म्हणतात.

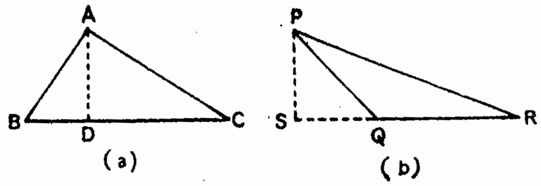


आ. 6·52

उदाहरणार्थ, आ. 6·51 मध्ये रेख BC ला समाविष्ट करणाऱ्या रेषेवर A पासून रेख AO लंब काढला आहे. म्हणून रेख AO हा △ ABC चा एक **शिरोलंब** आहे. O बिंदू हा त्या शिरोलंबाचा पाद आहे. $l(AO)$ ही △ ABC ची उंची आहे. तसेच $l(AO)$ ही A बिंदूची बाजू BC पासूनची उंची आहे.

§ 6·22 त्रिकोणाच्या शिरोलंबाबद्दल जास्त माहिती खाली दिली आहे. तिचा नीट अभ्यास करा.

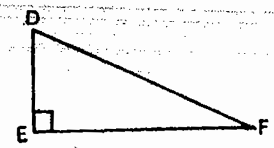
1. रेषेबाहेरील बिंदूपासून रेषेवर फक्त एकच लंब टाकता येतो. हे आपणास माहीत आहे. त्यावरून △ ABC च्या A ह्या शिरोबिंदूपासून बाजू BC वर फक्त एकच शिरोलंब राहील हे सांगता येते. म्हणजेच त्रिकोणाच्या कोणत्याही शिरोबिंदूपासून त्याच्या समोरील बाजूवर फक्त एकच शिरोलंब काढता येतो. मग त्रिकोणाला एकूण किती शिरोलंब असतील ?



आ. 6·53

2. आकृती 6·53 मध्ये △ ABC व △ PQR दाखवले असून त्यांचे अनुक्रमे रेख AD व रेख PS हे शिरोलंब आहेत. △ ABC मध्ये शिरोलंबाचा पाद D हा B आणि C च्या दरम्यान आहे. पण △ PQR मध्ये शिरोलंबाचा पाद S हा त्या त्रिकोणाच्या बाजूवर नाही, पण ती बाजू समाविष्ट करणाऱ्या रेषेवर आहे. याचाच अर्थ असा की, त्रिकोणाच्या शिरोलंबाचा पाद हा त्या त्रिकोणाच्या बाजूवर असेलच असे नाही. पण तो ती बाजू समाविष्ट करणाऱ्या रेषेवर मात्र असतोच.

DEF हा काटकोन त्रिकोण असल्यास (आ. 6·54) शिरोलंब DE म्हणजे त्या त्रिकोणाची एक बाजूच राहील व या लंबाचा पाद हा त्या त्रिकोणाचा एक शिरोबिंदूच असेल.



आ. 6·54

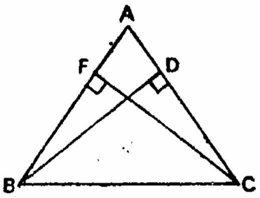
§ 6·23 समद्विभुज त्रिकोणाच्या पायाचा लंबदुभाजक पायाच्या समोरील शिरोबिंदूतून जातो. (का ?) तसेच समद्विभुज त्रिकोणाचा शिरोबिंदू व पायाचा मध्यबिंदू यांना जोडणारे रेषाखंड पायाला लंब असतात. (का ?)

म्हणजेच समद्विभुज त्रिकोणाचा एक शिरोलंब पायास दुभागतो. समद्विभुज त्रिकोणाच्या इतर दोन शिरोलंबासंबंधीचे काही गुणधर्म महत्त्वाचे आहेत. त्यांपैकी एक गुणधर्म स्पष्ट करणारे प्रमेय पुढे दिले आहे.

सिद्धतेमध्ये काही जागा रिकाम्या सोडल्या असून तिथे योग्य शब्द तुम्हाला भरायचे आहेत. कोणता शब्द भरायचा हे उजव्या बाजूस लगेच दिले असले तरी ते प्रथम कागदाने झाकून ठेवा. पहिली रिकामी जागा स्वतः भरा व नंतर तुमचे उत्तर दिलेल्या उत्तराशी ताडून पाहा. उत्तर जुळल्यास (ते खात्रीने जुळणारच !) दुसरी रिकामी जागा भरा. उत्तरे झाकणारा कागद हळूच खाली सरकवून पुन्हा तेवढेच उत्तर तपासून पाहा. अशा तऱ्हेने प्रत्येक रिकामी जागा भरून तिचे उत्तर लगेच पडताळून पाहून सिद्धता पूर्ण करा. मात्र एक गोष्ट ध्यानात ठेवा आणि ती म्हणजे रिकामी जागा प्रथम स्वतः भरायची आहे व नंतर लगेच तेवढेच उत्तर ताडून पाहायचे आहे.

§ 6·24 ■ प्रमेय :

समद्विभुज त्रिकोणाच्या एकरूप बाजूवर काढलेले शिरोलंब एकरूप असतात.



आ. 6·55

पक्ष : △ ABC मध्ये रेखAB ≅ रेखAC असून रेख BD व रेखCF हे B व C पासून शिरोलंब आहेत. (आ. 6·55)

साध्य : रेखBD ≅ रेख CF.

सिद्धता :

1. △ ABC हा ______ त्रिकोण आहे. .... पक्ष	समद्विभुज
2. समद्विभुज त्रिकोणाच्या एकरूप बाजूंसमोरील कोन ______ असतात. .... समद्विभुज △ चे प्रमेय.	एकरूप
3. △ ABC मध्ये रेख AB ≅ ______ .... पक्ष	रेख AC
4. ∴ ∠ ______ ≅ ∠ ______ .... विधान 2	∠ ABC ≅ ∠ ACB
5. C हा △ ABC चा एक शिरोबिंदू असून रेख CF हा C पासून ______ आहे. .... पक्ष	शिरोलंब
6. तसेच ______ पासून बाजू AC वर ______ हा शिरोलंब आहे. .... पक्ष	B रेख BD
7. ∴ $m\angle BDC = m\angle BFC$ ______ = ______ .... शिरोलंबाची व्याख्या	90
8. आता △ BDC व △ BFC एकरूप दाखवू या.	
रेख BC ≅ ______ .... समाईक	रेख BC
∠ FBC ≅ ______ .... विधान 4	∠ DCB
______ ≅ ∠ BFC .... विधान 7	∠ BDC
∴ ______ ≅ △ BFC .... बाकोको गृहीतक	△ BDC
9. ∴ रेख ______ ≅ रेख ______ हेच आपणास सिद्ध करायचे होते.	FC, BD

वरील प्रमेयात आकृती काढताना ∠ A हा लघुकोन दाखवला आहे. ∠ A हा विशालकोन अथवा काटकोन असताना देखील हे प्रमेय सिद्ध करता येते. किंबहुना त्यांचा विचार केल्याशिवाय सिद्धता पूर्ण होऊ शकणार नाही. त्यासाठी योग्य आकृती काढून या प्रमेयाची सिद्धता पूर्ण करा.

§ 6·25 प्रश्न :

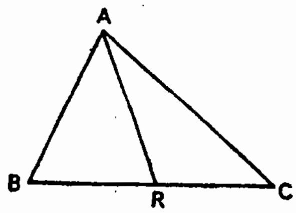
1. एखादया प्रतलात रेषा L व तिच्या बाहेरील P बिंदू दिला असेल तर खालीलपैकी कोणती विधाने सत्य होतील ?
   (a) P मधून जाणारी एकच रेषा असते.
   (b) P मधून जाणारी व L रेषेला लंब असणारी एकच रेषा असते.
   (c) P मधून जाणारी व L रेषेला लंब असणारी किमान एक तरी रेषा असतेच.
   (d) L रेषेला लंब असणारी एक आणि एकच रेषा असते.
   (e) P मधून जाणाऱ्या व L रेषेला लंब असणाऱ्या दोन रेषा असू शकत नाहीत.

2. रेषा L ही दिलेली रेषा असून तिच्याबाहेर A हा बिंदू आहे असे समजा. रेषा AB ही रेषा L ला H बिंदूत लंब आहे व रेषा AC ही L रेषेला I बिंदूत लंब आहे.
   तर, (i) H आणि I यांच्यात काय संबंध आहे ?
   (ii) रेषा AB व रेषा AC यांच्यात काय संबंध आहे ?
   (iii) अंतर AH व अंतर AI यांच्यात काय संबंध आहे ?

3. रिकाम्या जागी योग्य शब्द भरून विधाने पूर्ण करा.
   (i) रेषेबाहेरील बिंदूतून रेषेवर काढलेल्या लंबाची लांबी म्हणजे त्या बिंदूचे त्या रेषेपासूनचे ——— होय.
   (ii) त्रिकोणाच्या एका बाजूवरील लंब जर तिच्यासमोरील शिरोबिंदूतून जात असेल तर त्या लंबाला ——— म्हणतात.
   (iii) त्रिकोणाला ——— शिरोलंब असतात.
   (iv) रेषेबाहेरील बिंदूतून रेषेवर काढलेला लंब त्या रेषेला ज्या बिंदूत मिळतो त्या बिंदूला त्या लंबाचा ——— म्हणतात.

4. कोणत्याही विषमभुज त्रिकोणात शिरोबिंदूतून पायावर काढलेली लंबरेषा पायाला दुभागत नाही हे सिद्ध करा. (अप्रत्यक्ष सिद्धता वापरा.)

5. खाली दिलेले पक्ष व साध्य यांवरून सिद्धता लिहा.
   पक्ष : △ ABC मध्ये, R हा रेख BC चा मध्यबिंदू आहे पण रेख AR हा ∠ A चा कोनदुभाजक नाही.
   साध्य : रेख AB ही रेख AC शी एकरूप नाही.



आ. 6·56

आपण काय शिकलो ?

(1) **संज्ञा-व्याख्या :**

रेषारेषांमधील लंबता; रेषाखंडाची व किरणाची लंबता; रेषाखंडाची लंबदुभाजक रेषा; दिलेल्या बिंदूपासून दिलेल्या रेषेला काढलेला लंब; त्रिकोणाचा शिरोलंब.

(2) **कल्पना :**

सिद्धता देताना सर्व पर्याय लक्षात घेणे.

(3) **प्रमेये :**

(i) लंबरेषा रचनेचे प्रमेय – 1 (ii) रेषाखंडाचा लंबदुभाजक (iii) लंबरेषा रचनेचे प्रमेय – 2 (iv) लघुतम रेषाखंडाचे प्रमेय – 1 (v) लघुतम रेषाखंडाचे प्रमेय – 2 (vi) समद्विभुज त्रिकोणाच्या एकरूप बाजूंवरील शिरोलंब.

उपप्रमेय :

रेषाखंडाचा लंबदुभाजक.

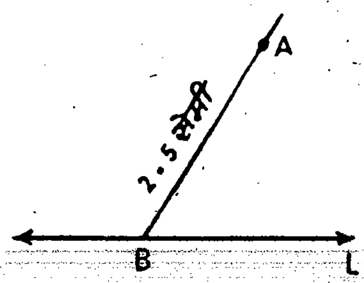
प्रश्नसंग्रह

1. खालील विधाने सत्य आहेत की असत्य ते सकारण सांगा.

(i) त्रिकोणाची एक बाजू त्या त्रिकोणाचा एक शिरोलंब असू शकते.

(ii) प्रत्येक त्रिकोणाला तीन शिरोलंब असतात.

(iii) समद्विभुज त्रिकोणाचे कोणतेही दोन शिरोलंब एकरूप असतात.



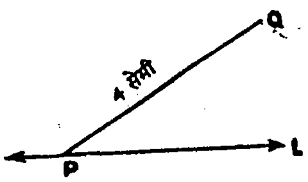
आ. 6·57

(iv) त्रिकोणाचा शिरोलंब हा नेहमी त्रिकोणाच्या अंतर्भागातच असतो.

(v) आ. 6·57 मध्ये रेखAB ची लांबी 2·5 सेमी असेल तर A बिंदूचे L रेषेपासूनचे अंतर 2·5 सेमी पेक्षा कमी राहील.

(vi) त्रिकोण ABC मध्ये बाजू AB व बाजू AC हे दोन्ही बाजू BC ला लंब असू शकतात.

(vii) एक रेषा दिलेल्या रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूतून जाते. या मध्यबिंदूखेरीज तिचा दुसरा कोणताही बिंदू त्या रेषाखंडाच्या अंत्यबिंदूपासून समदूर नसेल तर ती रेषा त्या रेषाखंडाला लंब नसते.



आ. 6·58

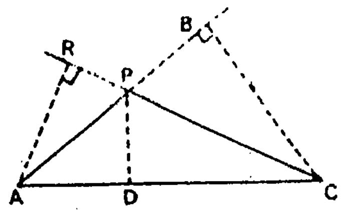
(viii) बाजूच्या आकृतीवरून Q बिंदूचे रेषा L पासूनचे अंतर 4 सेमी आहे असे सांगता येते.

(ix) रेषेबाहेरील बिंदूतून रेषेपर्यंत काढलेल्या रेषाखंडांपैकी जो रेषाखंड सर्वात लहान असतो तो त्या बिंदूतून त्या रेषेवर काढलेला लंब असू शकतो.

2. रिकाम्या जागा भरा.

(i) जर एखादया त्रिकोणाचे तीनही शिरोलंब एकरूप असतील तर तो त्रिकोण ________ भुज असतो.

(ii) आकृती 6·59 मध्ये △PAC च्या शिरोलंबांचे पाद ________, ________ आणि ________ हे आहेत.



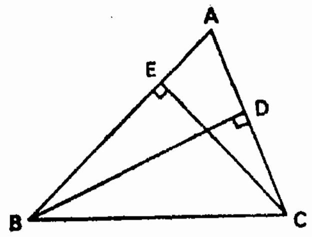
आ. 6·59

(iii) रेषाखंडाच्या लंबदुभाजकावरील कोणताही बिंदू रेषाखंडाच्या टोकांपासून ________ अंतरावर असतो.

(iv) रेषेला लंबदुभाजक ________ पण रेषाखंडाला लंबदुभाजक ________ (असतो / नसतो)

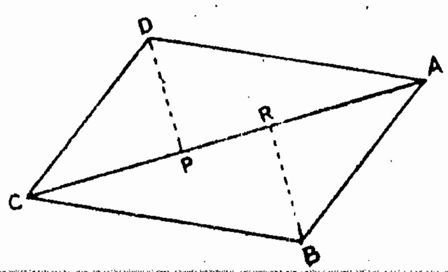
(v) आ. 6·60 मध्ये रेखBD $\perp$ रेखAC आणि रेखCE $\perp$ रेख AB तर रेख CE हा त्रिकोणाच्या ——— व ——— बाजूपेक्षा लहान आहे व रेखBD हा त्रिकोणाच्या ——— आणि ——— बाजूंपेक्षा लहान आहे.

(vi) त्रिकोणाचे दोन शिरोलंब एकरूप असतील तर तो त्रिकोण ——— भुज असतो.



आ. 6·60

3. आ. 6·61 मध्ये रेखAB $\cong$ रेखDC, रेखAD $\cong$ रेखBC असून रेखDP $\perp$ रेखAC आणि रेखBR $\perp$ रेखAC; तर, रेख DP $\cong$ रेख BR हे सिद्ध करा.



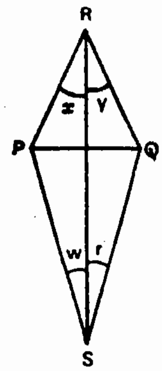
आ. 6·61

4. रेषा L ही रेषाखंड QT ची लंबदुभाजक रेषा आहे. L रेषेच्या ज्या बाजूस Q आहे त्याच बाजूस P बिंदू आहे. P, Q, T हे बिंदू नैकरेषिक असून रेषाL व रेखPT हे एकमेकांस R मध्ये छेदतात.

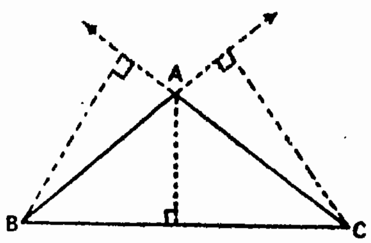
सिद्ध करा की, $l(\text{PT}) = l(\text{PR}) + l(\text{RQ})$

5. **पक्ष** : P, R, Q, S हे बिंदू एका प्रतलात असून, $m\angle x = m\angle y$ व $m\angle w = m\angle r$ (आ. 6·62)

साध्य : रेषा RS ही रेखPQ ची लंबदुभाजक रेषा आहे.



आ. 6·62

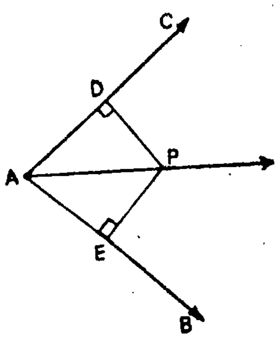


आ. 6·63

6. **पक्ष** : आ. 6·63 मध्ये $\triangle$ ABC च्या बाजूंच्या लांबी a, b, c असून शिरोलंबांच्या लांबी p, q, r आहेत.

साध्य : $p+q+r < a+b+c$

7. **पक्ष :** $\angle BAC$ च्या अंतर्भागात P बिंदू असून



रेखPD ⊥ रेषाAC व

रेखPE ⊥ रेषाAB

आणि रेखAD ≅ रेख AE

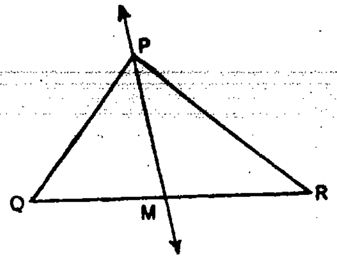
साध्य : $\angle BAP \cong \angle CAP$.

आ. 6·64

8. A, B, C, D हे बिंदू एकाच प्रतलात असतील व $l(AB)=l(BC)$ आणि $l(AD)=l(DC)$ असेल तर रेषा BD ही रेखAC चा लंबदुभाजक आहे हे सिद्ध करा.

9. त्रिकोणाचे दोन शिरोलंब एकरूप असतील तर तो समद्विभुज त्रिकोण असतो हे सिद्ध करा.

10. त्रिकोणाचे तीन शिरोलंब एकरूप असतील तर तो त्रिकोण समभुज असतो हे सिद्ध करा.



आ. 6·65

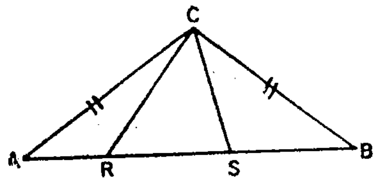
11. **पक्ष :** $\triangle PQR$ च्या बाजू QR चा M हा मध्यबिंदू आहे आणि $l(QP) \neq l(PR)$

साध्य : रेषा PM ही रेखQR ला लंब नाही.

12. **पक्ष :** आकृती 6·66 मध्ये रेख AC ≅ रेख BC

रेखCR हा रेखCS ला एकरूप नाही.

साध्य : रेखAR हा रेख SB ला एकरूप नाही.

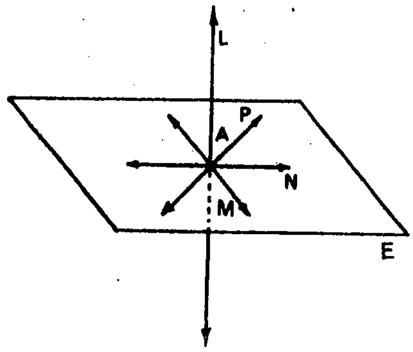


आ. 6·66

पारिभाषिक शब्द

उंची – Height
लंब – Perpendicular
लंबता – Perpendicularity
लंबदुभाजक – Perpendicular Bisector
शिरोलंब – Altitude

आ. 7·6 मध्ये दाखविलेली L रेषा प्रतल E ला A बिंदूत छेदते व A मधून जाणाऱ्या प्रतल E मधील M, N, P,... अशा **प्रत्येक रेषेला** ती (L रेषा) लंब आहे. त्यामुळे या स्थितीत $L \perp E$ असे म्हणता येईल.

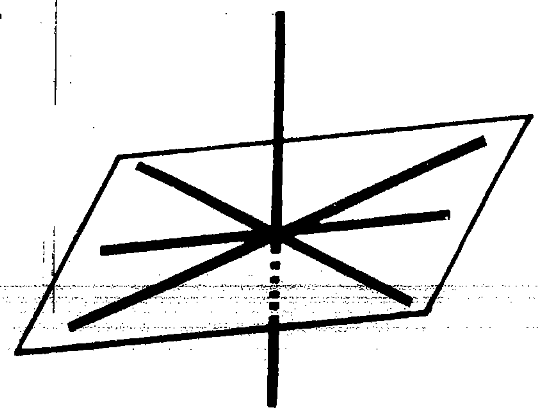


आ. 7·6

आपण जेव्हा $L \perp E$, म्हणतो तेव्हा त्याचा अर्थ रेषा L ही L व E यांच्या छेदनबिंदूतून जाणाऱ्या व E प्रतलात असणाऱ्या प्रत्येक रेषेस लंब असते असा होतो.

§ **7·4** प्रतलास छेदणारी एखादी रेषा त्या प्रतलातील त्या छेदनबिंदूतून जाणाऱ्या एका रेषेस लंब असताना दुसऱ्या रेषेस लंब नसण्याची शक्यता आहे हे आपण पाहिले. (आ. 7·5)

समजा रेषा L व प्रतल E यांच्या छेदनबिंदूतून जाणाऱ्या व E प्रतलात समाविष्ट असणाऱ्या M आणि N अशा दोन रेषांपैकी प्रत्येकीस L रेषा लंब आहे. आता त्या छेदनबिंदूतून जाणाऱ्या व प्रतल E मध्ये समाविष्ट असणाऱ्या एखादया रेषेस, रेषा L ही **लंब नसण्याची शक्यता** असते काय ?



आ. 7·7

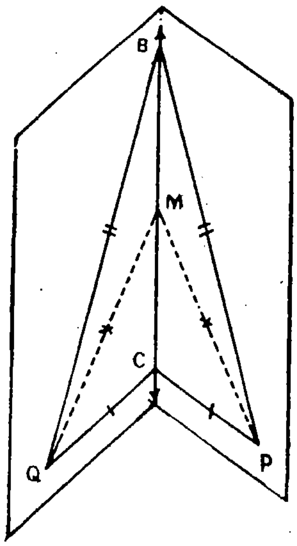
दोन जाड तारा एका बिंदूत एकमेकीस बांधा. त्या बिंदूत त्या प्रत्येक तारेशी काटकोन करील अशा प्रकारे एक तार त्यांना बांधा. (आ. 7·7). त्या दोन तारांच्या प्रतलात राहील अशा बेताने आणखी एक तार त्यांना ज्या बिंदूत बांधले तेथेच बांधा.

ही तार, त्या काटकोनातील तारेशी लंब असतेच असे आढळेल.

हा अनुभव प्रमेयस्वरूपात मांडून, भूमितीय पद्धतीने त्याची सिद्धता देणार आहोत. ही सिद्धता कळण्यास सोपी जावी म्हणून काही उपयुक्त गुणधर्म आपण आधी सिद्ध करून घेत आहोत. असा गुणधर्म म्हणजे देखील एक प्रकारचे प्रमेयच असते. आपण त्यांना पूर्वप्रमेय (Lemma) म्हणू.

§ 7·5 **पूर्वप्रमेय :**

B आणि C यांपैकी प्रत्येक बिंदू P आणि Q ह्या दोन भिन्न बिंदूंपासून समदूर असेल तर B आणि C यांच्या दरम्यानचा प्रत्येक बिंदू हा P आणि Q पासून समदूर असतो.



आ. 7·8

म्हणजे, जर

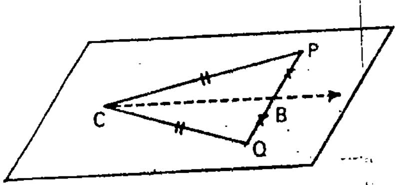
$l(BP) = l(BQ), l(CP) = l(CQ)$ असेल

आणि M हा B व C यांच्या दरम्यानचा एक बिंदू असेल, तर

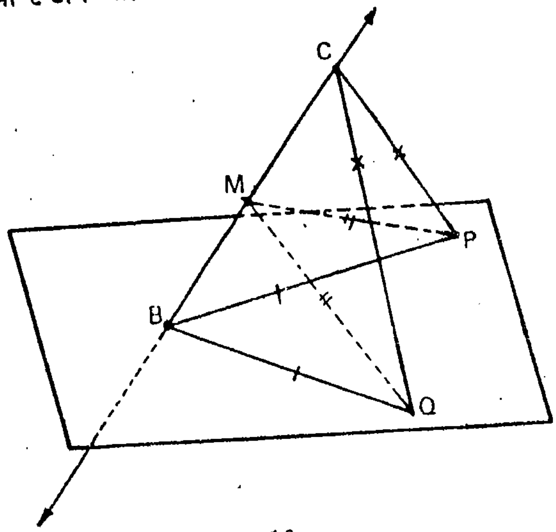
$l(MP) = l(MQ)$ असते.

सिद्धतेवर विचार करण्यापूर्वी B, C, P व Q ह्या चार भिन्न बिंदूंची स्थिती कशी असू शकेल याचा विचार करू.

B आणि C यांपैकी फार तर एखादाच बिंदू रेषा PQ वर राहू शकेल. त्यावेळी तो बिंदू रेख PQ चा मध्यबिंदू असेल का ? B आणि C पैकी एक तरी बिंदू रेषा PQ च्या बाहेर असला पाहिजे. कदाचित दोन्ही बिंदू रेषा PQ च्या बाहेर असतील तर अशा वेळी हे चार बिंदू एकाच प्रतलात असतात किंवा नसतात. (या दृष्टीने आ. 7·9 व आ. 7·10 पाहा.)



आ. 7·9



आ. 7·10

पुढील सिद्धता ही प्रत्येक परिस्थितीत लागू पडते याची प्रत्येकाने आपल्या मनाशी खात्री पटवून घेतली पाहिजे.

पक्ष : $l(BP) = l(BQ)$, $l(CP) = l(CQ)$ आणि B – M – C.

साध्य : $l(MP) = l(MQ)$

(संदर्भासाठी आ. 7·8 पाहा)

सिद्धता : △ BCP व △ BCQ यांत,

(i) रेखBC समाईक आहे.

रेखBP ≅ रेख BQ } (पक्ष)

रेखCP ≅ रेख CQ }

∴ △ BCP ≅ △ BCQ (बाबाबा गृहीतक)

∴ ∠ PBC ≅ ∠ QBC

(ii) आता, △ BMP व △ BMQ यांत

रेख BM समाईक आहे

रेखBP ≅ रेखBQ (पक्ष)

व ∠ PBM ≅ ∠ QBM (परिच्छेद (i) वरून)

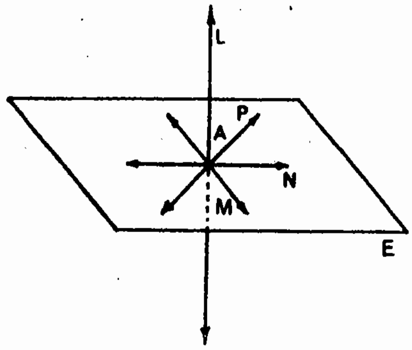
∴ △ BMP ≅ △ BMQ (बाकोबा गृहीतक)

∴ रेख MP ≅ रेख MQ

म्हणजेच $l(MP) = l(MQ)$

आ. 7·6 मध्ये दाखविलेली L रेषा प्रतल E ला A बिंदूत छेदते व A मधून जाणाऱ्या प्रतल E मधील M, N, P,... अशा **प्रत्येक रेषेला** ती (L रेषा) लंब आहे. त्यामुळे या स्थितीत L ⊥ E असे म्हणता येईल.

आपण जेव्हा L ⊥ E, म्हणतो तेव्हा त्याचा अर्थ रेषा L ही L व E यांच्या छेदनबिंदूतून जाणाऱ्या व E प्रतलात असणाऱ्या प्रत्येक रेषेस लंब असते असा होतो.



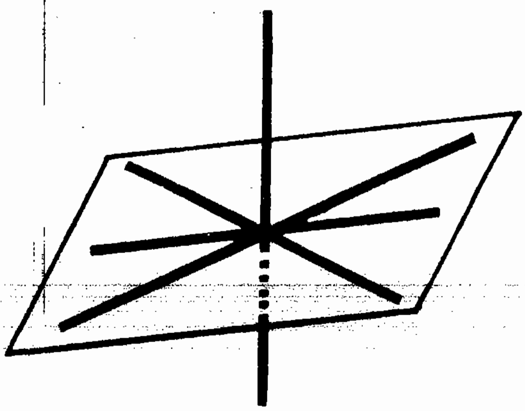
आ. 7·6

§ 7·4 प्रतलास छेदणारी एखादी रेषा त्या प्रतलातील त्या छेदनबिंदूतून जाणाऱ्या एका रेषेस लंब असताना दुसऱ्या रेषेस लंब नसण्याची शक्यता आहे हे आपण पाहिले. (आ. 7·5)

समजा रेषा L व प्रतल E यांच्या छेदनबिंदूतून जाणाऱ्या व E प्रतलात समाविष्ट असणाऱ्या M आणि N अशा दोन रेषांपैकी प्रत्येकीस L रेषा लंब आहे. आता त्या छेदनबिंदूतून जाणाऱ्या व प्रतल E मध्ये समाविष्ट असणाऱ्या एखादया रेषेस, रेषा L ही **लंब नसण्याची शक्यता** असते काय ?

दोन जाड तारा एका बिंदूत एकमेकीस बांधा. त्या बिंदूत त्या प्रत्येक तारेशी काटकोन करील अशा प्रकारे एक तार त्यांना बांधा. (आ. 7·7). त्या दोन तारांच्या प्रतलात राहील अशा बेताने आणखी एक तार त्यांना ज्या बिंदूत बांधले तेथेच बांधा.

ही तार, त्या काटकोनातील तारेशी लंब असतेच असे आढळेल.



आ. 7·7

हा अनुभव प्रमेयस्वरूपात मांडून, भूमितीय पद्धतीने त्याची सिद्धता देणार आहोत. ही सिद्धता कळण्यास सोपी जावी म्हणून काही उपयुक्त गुणधर्म आपण आधी सिद्ध करून घेत आहोत. असा गुणधर्म म्हणजे देखील एक प्रकारचे प्रमेयच असते. आपण त्यांना पूर्वप्रमेय (Lemma) म्हणू.

§ 7·5 पूर्वप्रमेय :

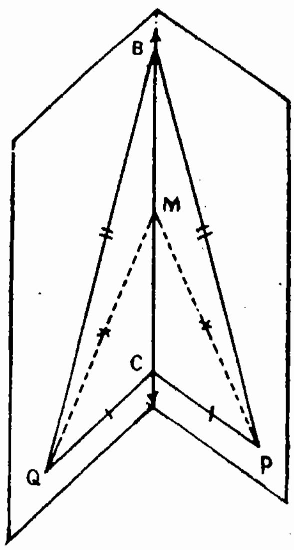
> **B आणि C यांपैकी प्रत्येक बिंदू P आणि Q ह्या दोन भिन्न बिंदूंपासून समदूर असेल तर B आणि C यांच्या दरम्यानचा प्रत्येक बिंदू हा P आणि Q पासून समदूर असतो.**

म्हणजे, जर

$l(BP) = l(BQ), l(CP) = l(CQ)$ असेल

आणि M हा B व C यांच्या दरम्यानचा एक बिंदू असेल, तर

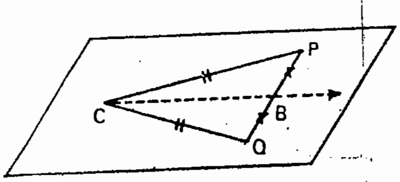
$l(MP) = l(MQ)$ असते.



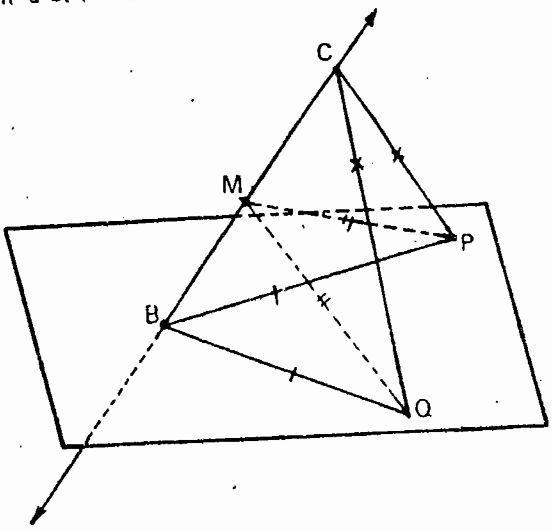
आ. 7·8

सिद्धतेवर विचार करण्यापूर्वी B, C, P व Q ह्या चार भिन्न बिंदूंची स्थिती कशी असू शकेल याचा विचार करू.

B आणि C यांपैकी फार तर एखादाच बिंदू रेषा PQ वर राहू शकेल. त्यावेळी तो बिंदू रेख PQ चा मध्यबिंदू असेल का ? B आणि C पैकी एक तरी बिंदू रेषा PQ च्या बाहेर असला पाहिजे. कदाचित दोन्ही बिंदू रेषा PQ च्या बाहेर असतील तर अशा वेळी हे चार बिंदू एकाच प्रतलात असतात किंवा नसतात. (या दृष्टीने आ. 7·9 व आ. 7·10 पाहा.)



आ. 7·9



आ. 7·10

पुढील सिद्धता ही प्रत्येक परिस्थितीत लागू पडते याची प्रत्येकाने आपल्या मनाशी खात्री पटवून घेतली पाहिजे.

पक्ष : $l(BP) = l(BQ)$, $l(CP) = l(CQ)$ आणि B – M – C.

साध्य : $l(MP) = l(MQ)$

(संदर्भासाठी आ. 7·8 पाहा)

सिद्धता : △ BCP व △ BCQ यांत,

(i) रेख BC समाईक आहे.

रेख BP ≅ रेख BQ } (पक्ष)
रेख CP ≅ रेख CQ }

∴ △ BCP ≅ △ BCQ (बाबाबा गृहीतक)

∴ ∠ PBC ≅ ∠ QBC

(ii) आता, △ BMP व △ BMQ यांत

रेख BM समाईक आहे

रेख BP ≅ रेख BQ (पक्ष)

व ∠ PBM ≅ ∠ QBM (परिच्छेद (i) वरून)

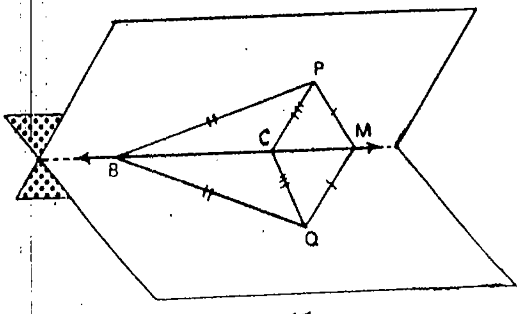
∴ △ BMP ≅ △ BMQ (बाकोबा गृहीतक)

∴ रेख MP ≅ रेख MQ

म्हणजेच $l(MP) = l(MQ)$

§ 7·6 मागच्या प्रमेयात जरी फक्त **B व C** यांच्या दरम्यानच्या बिंदूबद्दलच विधान केले आहे, तरी त्याच पद्धतीच्या सिद्धतेने रेषा **BC** चा प्रत्येक बिंदू **P व Q** पासून समदूर असतो हे सिद्ध करता येते.

(आ. 7·11 ची मदत घ्या).



आ. 7·11

जिचे B व C हे दोन भिन्न बिंदू, दिलेल्या P व Q या दोन भिन्न बिंदूंपासून समदूर असतील त्या रेषेचा प्रत्येक बिंदू P व Q बिंदूंपासून समदूर असतो असे आपल्याला आता म्हणता येते.

रेषा BC व बिंदू P आणि Q जर एकाच प्रतलात असतील आणि जर रेषा BC चा प्रत्येक बिंदू P आणि Q पासून समदूर असेल तर रेषाBC रेखPQ चा लंबदुभाजक होते, याची माहिती मागील प्रकरणात येऊन गेली आहे.

§ 7·7 प्रश्न :

1. प्रतल E मध्ये A, B, C हे तीन बिंदू दिले असून ते एकरेषीय नाहीत. P व Q हे दोन्ही, प्रतल E च्या बाहेर असणारे बिंदू आहेत.

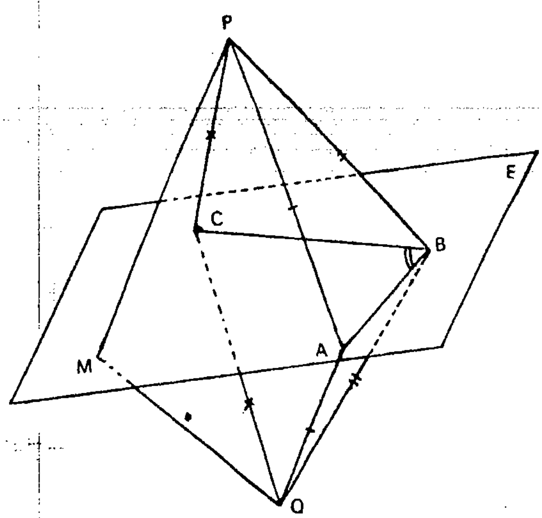
   $d(P, A) = d(Q, A)$,

   $d(P, B) = d(Q, B)$ आणि

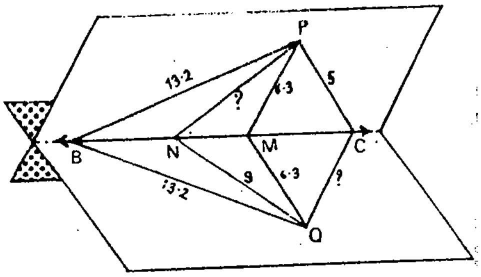
   $d(P, C) = d(Q, C)$.

   $\angle ABC$ च्या अंतर्भागातील M हा एक बिंदू आहे. तर सिद्ध करा की,

   $d(P, M) = d(Q, M)$



आ. 7·12

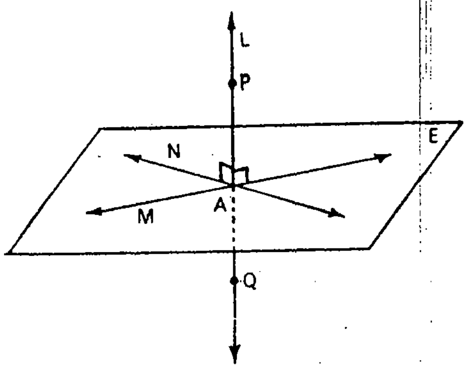


आ. 7·13

2. सोबत दिलेल्या आकृतीतील प्रश्नचिन्हाने दाखवलेल्या रेषाखंडाची लांबी सांगा.

§ 7·8 ■ प्रतल व रेषा यांच्या लंबतेचे मूलभूत प्रमेय :

जर एक रेषा दुसऱ्या दोन छेदक रेषांपैकी प्रत्येकीस त्यांच्या छेदनबिंदूच्या ठिकाणी लंब असेल, तर ती (पहिली) रेषा त्या दोन (छेदक) रेषांनी निश्चित केलेल्या प्रतलास लंब असते.



आ. 7·14

पक्ष : रेषा M आणि N परस्परांना A बिंदूत छेदतात. L ही रेषा A मधून जाते. $L \perp M$ आणि $L \perp N$.

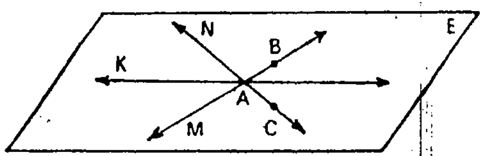
साध्य : M आणि N यांनी निश्चित केलेल्या प्रतलास A बिंदूच्या ठिकाणी L रेषा लंब आहे.

सिद्धता : L रेषेवर P व Q हे असे दोन बिंदू घ्या की A हा P व Q यांच्या दरम्यान राहील आणि $l(AP) = l(AQ)$.

यामुळे, A हा रेख PQ चा मध्यबिंदू ठरतो. पक्षानुसार, रेषा M ⊥ रेषा PQ आणि M रेषा A मधून जाते.

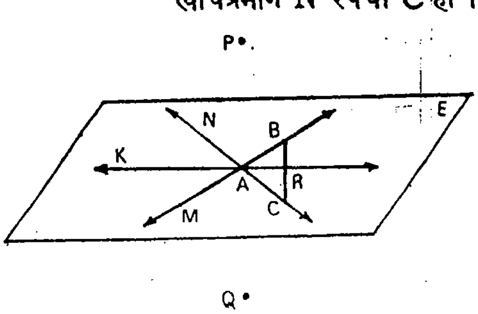
म्हणून, रेषा M ही रेख PQ ची लंबदुभाजक ठरते. याचप्रमाणे रेषा N ही देखील रेख PQ ची लंबदुभाजक ठरते.

(ii) M आणि N ह्या परस्परांना छेदणाऱ्या रेषा आहेत. त्यामुळे त्या एक प्रतल निश्चित करतात. समजा ते प्रतल E आहे. A बिंदूतून जाणारी व E प्रतलात असणारी K ही एक रेषा घ्या. K च्या विरुद्ध अंगांस येतील असे, रेषा M वर B आणि रेषा N वर C हे दोन बिंदू घ्या.



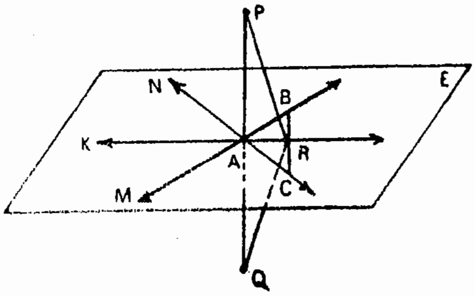
आ. 7·15

(iii) रेषाखंडाच्या लंबदुभाजकावरील प्रत्येक बिंदू त्या रेषाखंडाच्या टोकांपासून समदूर असतो. म्हणून M रेषेचा B हा बिंदू P व Q पासून समदूर असला पाहिजे. त्याचप्रमाणे N रेषेचा C हा बिंदू P व Q पासून समदूर असला पाहिजे.



आ. 7·16

व त्यामुळे रेख BC चा प्रत्येक बिंदू हा P व Q पासून समदूर असला पाहिजे. परिच्छेद (ii) प्रमाणे, रेख BC हा K रेषेला छेदीलच (प्रतल विभाजन गृहीतक). समजा, त्यांचा छेदनबिंदू R आहे. मग R हा बिंदू, P व Q यांपासून समदूर असला पाहिजे. म्हणजे $l(RP) = l(RQ)$



आ. 7·17

(iv) $\triangle PAR$ व $\triangle QAR$ यात रेखAR समाईक.

रेखAP $\cong$ रेखAQ...(i)

व रेखPR $\cong$ रेख QR...(iii)

त्यामुळे $\triangle PAR \cong \triangle QAR$

(बाबाबा गृहीतक)

$\therefore \angle PAR \cong \angle QAR$.

पण, A हा P व Q यांच्या दरम्यान असल्यामुळे किरण AP व किरण AQ हे विरुद्ध किरण आहेत. म्हणून $\angle PAR$ व $\angle QAR$ यांची रेषीय जोडी होते. रेषीय जोडीतील दोन कोन एकरूप असल्यास त्यांपैकी प्रत्येक कोन हा काटकोन असतो. म्हणून $\angle PAR$ हा काटकोन आहे. $\therefore$ रेषा $PA \perp$ रेषा AR. (म्हणजेच $L \perp K$.) पण K ही A बिंदूतून जाणारी व E प्रतलात असणारी कोणतीही रेषा होती.

(v) A बिंदूतून जाणाऱ्या व E प्रतलात असणाऱ्या प्रत्येक रेषेस, L रेषा ही अशा प्रकारे लंब ठरते. म्हणून L रेषा ही E प्रतलास लंब असली पाहिजे.

§ 7·9 परिच्छेद 7·8 मध्ये सिद्ध केलेल्या प्रमेयाचा आपण कसा उपयोग करून घेऊ शकतो ते पाहू. समजा एखादी L रेषा एखाद्या E प्रतलास लंब आहे असे आपल्याला सिद्ध करायचे आहे. व्याख्येकडे जर पाहिले तर, छेदनबिंदूतून जाणाऱ्या व E प्रतलात असणाऱ्या प्रत्येक रेषेस L रेषा लंब असल्याचे सिद्ध करण्याची जबाबदारी येते. त्याऐवजी या प्रमेयाचा उपयोग केल्यास L रेषा E प्रतलातील E व L यांच्या छेदनबिंदूतून जाणाऱ्या दोन रेषांपैकी प्रत्येकीस लंब असल्याचे सिद्ध केल्याने आपले काम भागते. यावरून वरील प्रमेय आपल्याला पुढीलप्रमाणे वेगळ्या शब्दांत मांडता येते. ते असे :

'जर दिलेली L रेषा दिलेल्या E प्रतलास P या बिंदूत छेदत असेल आणि P बिंदूतून जाणाऱ्या E प्रतलातील कोणत्याही दोन रेषांना लंब असेल तर L रेषा E प्रतलाला लंब असते.'

§ 7·10 लंबप्रतलाचे अस्तित्व :

एखादी रेषा व एखादे प्रतल परस्परांस लंब आहेत याची कसोटी काय ते आपण पाहिले. पण दिलेल्या रेषेला एखादे तरी प्रतल लंब असते की नाही आणि असल्यास ते कोणते, याबद्दल आतापर्यंत आपण काही निश्चित सांगू शकत नव्हतो. पुढील प्रमेय लंबप्रतलाच्या अस्तित्वाची ग्वाही देते.

§ 7·11 ▪ लंबप्रतलाच्या अस्तित्वाचे प्रमेय :

दिलेल्या रेषेच्या दिलेल्या बिंदूतून जाणारे व त्या रेषेला लंब असणारे एक प्रतल असतेच.



पक्ष : L ही एक दिलेली रेषा असून A हा त्या रेषेचा एक दिलेला बिंदू आहे.

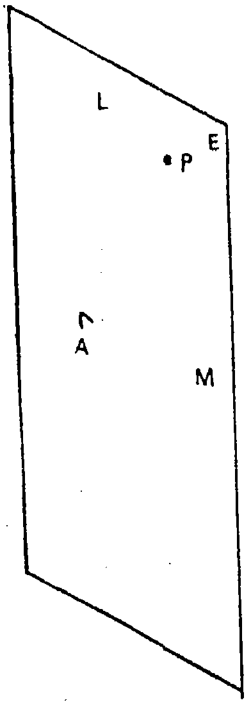
साध्य : A बिंदूतून जाणारे व रेषा L ला लंब असणारे एक प्रतल असतेच.

आ. 7·18

सिद्धता :

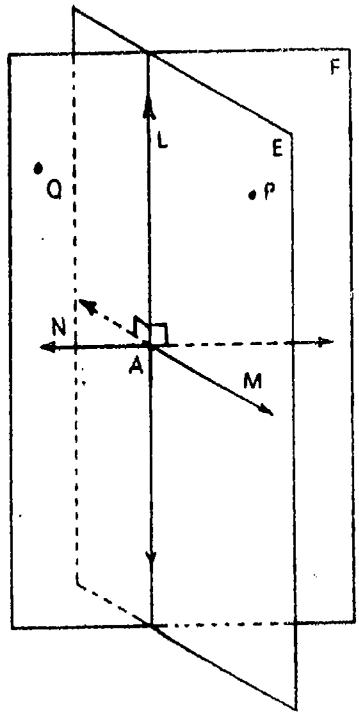
L या रेषेवर नसणारा अवकाशातील P हा एक बिंदू घ्या.

(i) प्रतल–निश्चितीच्या प्रमेयानुसार L रेषा व P बिंदू या दोहोंना सामावणारे एक (व फक्त एकच) प्रतल असते. समजा ते E प्रतल आहे. या E प्रतलात L रेषेला A बिंदूत लंब असणारी एक व फक्त एकच रेषा असते. समजा ती रेषा M आहे.



आ. 7·19

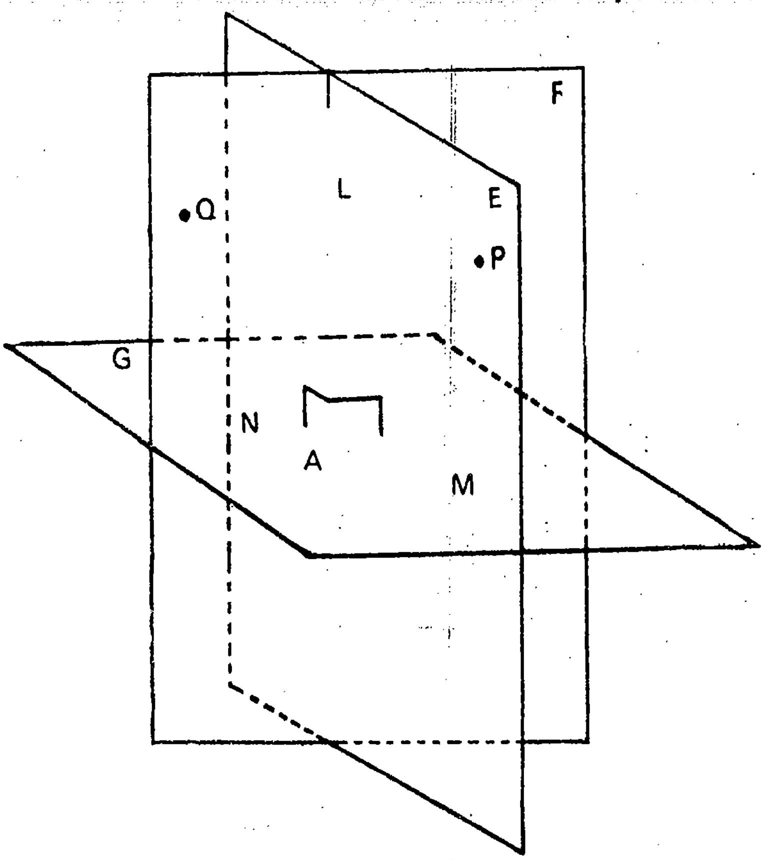
(ii) E प्रतलाबाहेरचा Q हा अवकाशातील एखादा बिंदू घ्या. हा Q बिंदू रेषा L वर नसेल हे उघडच आहे. L रेषा व Q बिंदू यांनी निश्चित केलेले प्रतल F आहे असे समजा. या F प्रतलात L रेषेला A बिंदूत लंब असणारी एक व फक्त एकच रेषा असते. समजा ती N आहे.



आ. 7·20

(iii) रेषा M आणि N ह्या भिन्न असून त्या परस्परांना A बिंदूत छेदतात. त्यामुळे M आणि N या दोहोंना सामावणारे एक (व फक्त एकच) प्रतल असते. समजा हे प्रतल G आहे. L ⊥ M आणि L ⊥ N असल्यामुळे L ⊥ G होते.

G हेच आपले इष्ट प्रतल होय. (कारण ते A बिंदूतून जाते व L या रेषेला लंब आहे.)



आ. 7·21

§ 7·12 परिच्छेद 7·11 मध्ये सिद्ध केलेल्या मूलभूत प्रमेयाची दुसरी एक सिद्धता पुढीलप्रमाणे देता येईल.

सिद्धता :

‘L रेषेला समाविष्ट करणारी असंख्य प्रतले असतात. त्या प्रत्येक प्रतलात L रेषेला तिच्या A बिंदूत लंब असणारी एक (व एकच) रेषा असते.
अशा सर्व (लंब) रेषा भिन्न असतात व त्या सर्व रेषांना A हा समाईक बिंदू असतो.
L रेषेला समाविष्ट करणारी, अशी E व F ही दोन प्रतले घेतल्यास, E मधील M आणि F मधील N ह्या, L रेषेला A वर लंब असणाऱ्या, रेषा मिळतात. M आणि N यांनी निश्चित केलेले प्रतल, रेषा L ला A बिंदूत लंब असते.’

§ 7·13 दिलेल्या रेषेला तिच्या दिलेल्या बिंदूवर लंब असणारे एक प्रतल असते हे आपण पाहिले. अस्तित्व सिद्ध करणारे हे प्रमेय म्हणजे एका दृष्टीने रचनेची रीतच असते. ती रीत आपण सांगितली ‘L रेषेला तिच्या A बिंदूत दोन लंबरेषा (वेगवेगळया प्रतलांत) काढा. या दोन लंब रेषांनी निश्चित केलेले प्रतल हेच आपल्याला हवे असलेले प्रतल होय.’

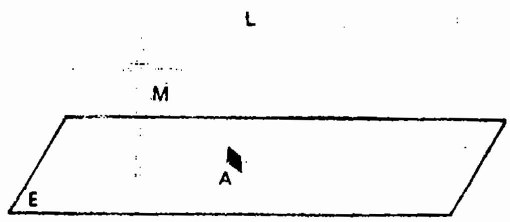
आता प्रश्न असा उद्भवतो की अशी किती प्रतले दिलेल्या A बिंदूवर दिलेल्या L रेषेला लंब असतील ?

पुढील प्रमेये या प्रश्नाचे उत्तर देतात.

§ 7·14 ▪ **प्रमेय :**

एक रेषा व एक प्रतल जर परस्परांस लंब असतील तर, त्यांच्या छेदनबिंदूतून जाणारी व त्या रेषेला लंब असणारी प्रत्येक रेषा त्या प्रतलात समाविष्ट असते.

पक्ष : रेषा L, प्रतल E ला A बिंदूत लंब आहे. L आणि E यांच्या A ह्या छेदन-बिंदूतून जाणारी आणि L ला लंब असणारी M ही कोणतीही एक रेषा आहे.



साध्य : रेषा M ही E प्रतलामध्ये असली पाहिजे.

आ. 7·22

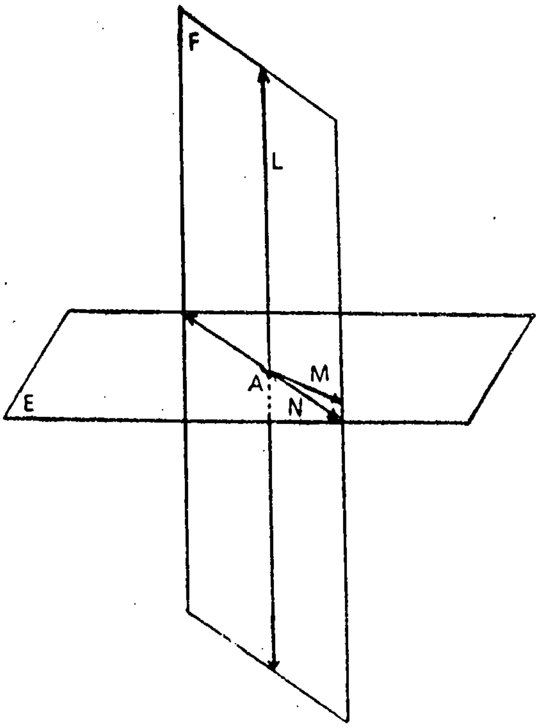
सिद्धता :

(i) रेषा L आणि M ह्या परस्परांना A बिंदूत छेदतात. त्यामुळे त्यांनी एक प्रतल निश्चित होते. समजा ते प्रतल F आहे.
आता E व F ही भिन्न प्रतले असून A हा त्यांचा एक समाईक बिंदू आहे. तेव्हा त्यांचा छेदसंच हा रिक्तसंच नाही हे नक्कीच.

प्रतलछेदनाच्या गृहीतकानुसार E व F या प्रतलांचा छेदसंच म्हणजे एक रेषा असली पाहिजे. समजा ही रेषा N आहे.

(ii) रेषा N, ही प्रतल E मध्ये आहे व ती A बिंदूतून जाते.
आणि पक्षानुसार L ⊥ E.
त्यामुळे N ⊥ L (A वर)

(iii) N रेषा, F प्रतलात आहे...(i)
व ती रेषा L ला A बिंदूत लंब आहे. ......(ii)
तसेच M रेषा, F प्रतलात आहे, ...(iii)
व ती रेषा L ला A बिंदूत लंब आहे. ......(पक्ष)



आ. 7·23

तेव्हा N = M. (कारण एकाच प्रतलात, त्या प्रतलातील दिलेल्या रेषेला तिच्या दिलेल्या बिंदूत लंब असणारी एक व फक्त एकच रेषा असते.)

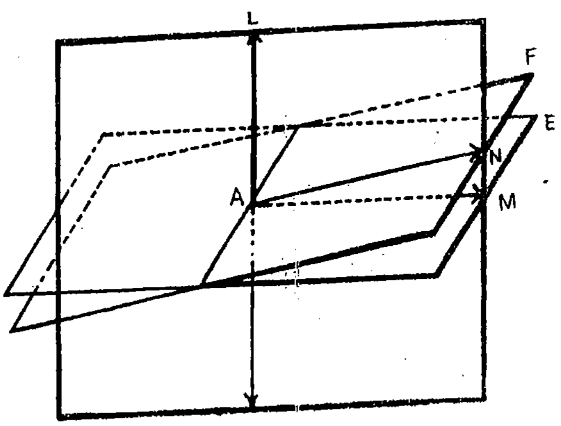
(iv) परिच्छेद (i) नुसार N रेषा प्रतल E मध्ये आहे.
परिच्छेद (iii) नुसार N म्हणजेच M रेषा आहे.
∴ M रेषा प्रतल E मध्ये असलीच पाहिजे.

§ 7·15 ▪ प्रमेय : लंबप्रतलाचे एकमेवत्व

रेषेच्या दिलेल्या बिंदूतून त्या रेषेस एकापेक्षा जास्त लंबप्रतले असू शकत नाहीत.

(म्हणजेच, दिलेल्या रेषेच्या एकाच बिंदूतून जाणारी दोन प्रतले जर त्या रेषेला लंब असतील तर ती प्रतले समान असतात.)

पक्ष : L रेषेस E प्रतल, बिंदू A वर लंब आहे.
आणि L रेषेस F प्रतल, बिंदू A वर लंब आहे.



आ. 7 24

साध्य : E = F

सिद्धता :

(i) A मधून जाणारी E प्रतलातील M ही कोणतीही रेषा घ्या. L रेषा, प्रतल E ला लंब असल्यामुळे L रेषा या M रेषेलाही लंब राहील
रेषा L आणि M या छेदक रेषांनी एक प्रतल निश्चित होते. ते प्रतल, F प्रतलास एका रेषेतच छेदील. समजा ती छेदनरेषा N आहे.

(ii) N रेषा, F प्रतलात आहे व ती A बिंदूतून जाते. आणि L रेषा, F प्रतलास लंब आहे. तेव्हा L रेषा या N रेषेसही लंब राहील.

(iii) L रेषेतून जाणाऱ्या एका प्रतलात, त्या रेषेच्या A या एकाच बिंदूच्या ठिकाणी M व N अशा दोन भिन्न लंबरेषा असणे शक्य नाही.
$\therefore M = N$

(iv) प्रतल E मध्ये राहणारी A बिंदूतून जाणारी व L रेषेला लंब असणारी M ऐवजी दुसरी कोणतीही रेषा घेतली तरी ती रेषा प्रतल F मध्ये आहेच असे वरील विधानावरून सिद्ध होते. म्हणजे E व F या दोन भिन्न प्रतलांना असंख्य रेषा समाईक आहेत असे ठरते. पण हे प्रतल छेदनाच्या गृहीतकाशी विसंगत आहे. म्हणून, E व F ही प्रतले भिन्न असणे अशक्य आहे. म्हणजेच, $E = F$.

§ 7·16 वरील प्रमेयाची आणखी एक सिद्धता होऊ शकते.

प्रतल E मध्ये A बिंदूपासून वेगळा असा P हा एक बिंदू घ्या.

रेषा L, प्रतल E ला लंब असल्यामुळे रेषा L ही, रेषा AP ला सुद्धा लंब राहील. आता L रेषेला तिच्या A बिंदूच्या ठिकाणी, प्रतल F हे लंब आहे.

$\therefore$ रेषा AP ही प्रतल F मध्ये समाविष्ट असलीच पाहिजे. अर्थात P बिंदूसुद्धा, प्रतल F मध्ये असलाच पाहिजे.

म्हणजे प्रतल E चा प्रत्येक बिंदू प्रतल F मध्ये आहे, हे सिद्ध झाले. (म्हणजे $E \subset F$)

याचप्रकारे, प्रतल F चा प्रत्येक बिंदू प्रतल E मध्ये आहे हे सिद्ध करता येते. (म्हणजे $F \subset E$)

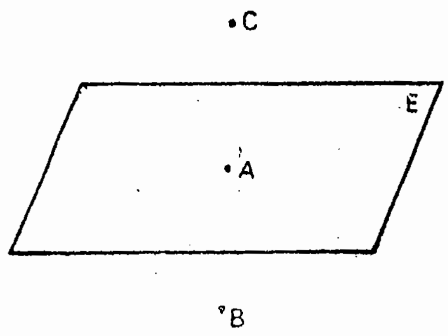
$\therefore E = F$.

§ 7·17 दिलेल्या रेषेला तिच्या दिलेल्या बिंदूत कमीतकमी एक प्रतल लंब असते व एकापेक्षा जास्त प्रतले लंब राहू शकत नाहीत या दोन्ही गोष्टी आपण आता सिद्ध केल्या आहेत. तेव्हा अशा प्रकारचे **दिलेल्या रेषेला, तिच्या दिलेल्या बिंदूत लंब असणारे एक व फक्त एकच प्रतल असते** हे सिद्ध झाले आहे.

§ 7·18 **व्याख्या : लंबदुभाजक**

दिलेल्या रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूतून जाणाऱ्या व त्या रेषाखंडास लंब असणाऱ्या प्रतलाला त्या रेषाखंडाचे **लंबदुभाजक प्रतल** (Perpendicular Bisecting Plane) म्हणतात.

प्रत्येक रेषाखंडास एक व एकच लंबदुभाजक प्रतल असते हे उघड आहे. पुढील पृष्ठावरील आकृतीत (आ. 7·25) रेख BC चा मध्यबिंदू A आहे. प्रतल E हे A बिंदूतून जाते आणि रेख BC $\perp$ E. म्हणून



आ. 7·25

येथे प्रतल E हे रेख BC चे लंबदुभाजक प्रतल आहे.

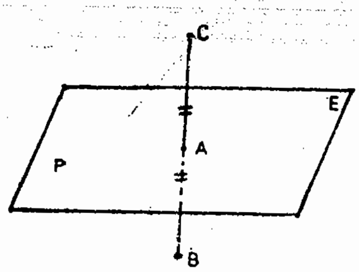
आता बाजूच्या आकृतीत (आ. 7·25) रेख BC ला काढता येणाऱ्या असंख्य लंबदुभाजक रेषांचा विचार करा. ही प्रत्येक लंबदुभाजक रेषा, E प्रतलात असते हे आपल्या सहज ध्यानात येते.

'रेषाखंडाची प्रत्येक लंबदुभाजक रेषा ही त्या रेषाखंडाच्या लंबदुभाजक प्रतलात समाविष्ट असते.'

'रेषाखंडाच्या लंबदुभाजक रेषेचा प्रत्येक बिंदू हा त्या रेषाखंडाच्या टोकांपासून समदूर असतो' हे आपण यापूर्वीच एका प्रमेयात शिकलो आहोत आणि रेषाखंडाच्या टोकांपासून समदूर असणारा प्रत्येक बिंदू त्या रेषाखंडाच्या कोणत्यातरी लंबदुभाजक रेषेवर असलाच पाहिजे हेही आपल्याला माहीत आहे.

त्यामुळे, 'रेषाखंडाच्या टोकांपासून समदूर असणारा प्रत्येक बिंदू हा त्या रेषाखंडाच्या लंबदुभाजक प्रतलात असतो' असे आपण म्हणू शकतो.

उलटपक्षी, 'दिलेल्या रेषाखंडाच्या लंबदुभाजक प्रतलातील प्रत्येक बिंदू हा त्या रेषाखंडाच्या टोकांपासून समदूर असतो' हेही सिद्ध करता येते.



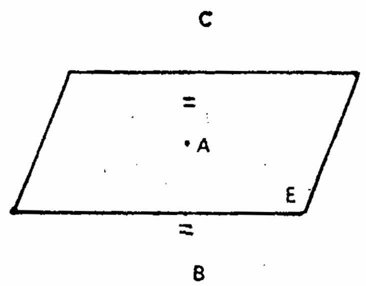
आ. 7·26

बाजूच्या आकृतीत, बिंदू A हा रेख BC चा मध्यबिंदू आहे आणि प्रतल E हे रेख BC चे लंबदुभाजक प्रतल आहे. प्रतल E मधील कोणताही बिंदू P ($\neq$ A) घेतल्यास $\triangle PAC \cong \triangle PAB$ (बाकोबा गृहीतकाने) होते व म्हणून P हा B व C पासून समदूर असल्याचे सिद्ध होते.

रेषाखंडाच्या लंबदुभाजक प्रतलाचे गुणधर्म सांगणारे प्रमेय पुढे मांडले आहे.

§ 7·19 ■ प्रमेय :

दिलेल्या रेषाखंडाचे लंबदुभाजक प्रतल म्हणजे त्या रेषाखंडाच्या टोकांपासून समदूर असणाऱ्या सर्व बिंदूंचा संच असतो.



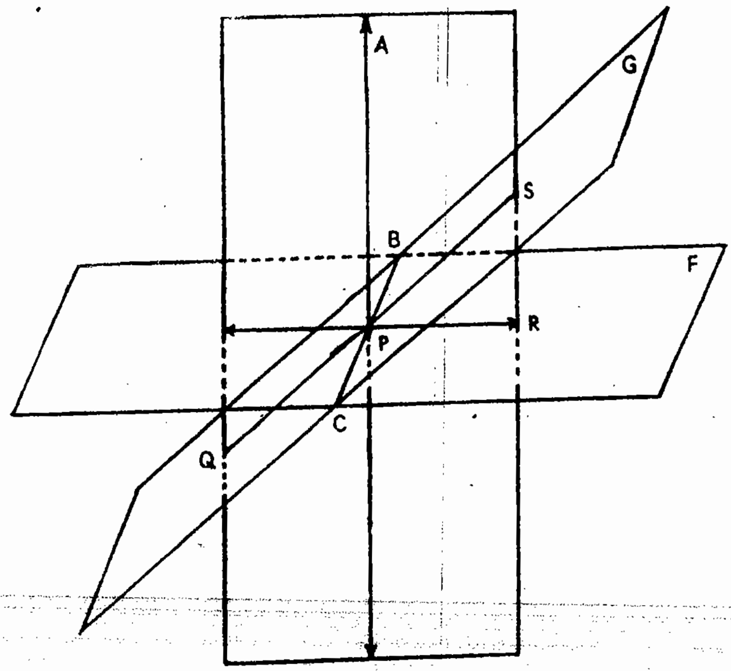
आ. 7·27

(या प्रमेयाची सिद्धता या पुस्तकाच्या कक्षेबाहेर आहे म्हणून ती दिलेली नाही.)

या प्रमेयाचा अर्थ असा की, रेख BC चा मध्यबिंदू A असून, प्रतल E जर रेख BC ला A बिंदूत लंब असेल तर त्या E प्रतलातील प्रत्येक बिंदू हा B व C बिंदूंपासून समदूर असतो व उलटपक्षी, B व C यांपासून समदूर असणारा प्रत्येक बिंदू हा त्या E प्रतलात असतो.

§ 7·20 **प्रश्न :**

1. दिलेल्या रेषेच्या दिलेल्या बिंदूतून जाणाऱ्या किती रेषा तिला लंब असतात?
2. दिलेल्या रेषेच्या दिलेल्या बिंदूतून जाणारी किती प्रतले तिला लंब असतात?



आ. 7·28

3. वरील आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे प्रतले F व G परस्परांना रेषा BC मध्ये छेदतात. रेषा AP ⊥ F. रेषा PR ही, प्रतल F मध्ये समाविष्ट आहे. प्रतल APR प्रतल G ला रेषा QS मध्ये छेदते. यावरून पुढील प्रश्नांची उत्तरे द्या व कारणे सांगा.

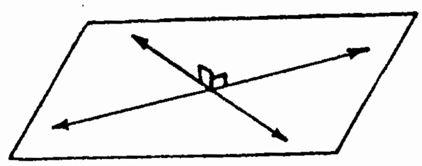
(i) रेषा AP, रेषा PR ला लंब आहे काय?
(ii) रेषा AP, रेषा QS ला लंब आहे काय?
(iii) रेषा AP, रेषा BC ला लंब आहे काय?

4. एका प्रतलास किती रेषा लंब असू शकतील?

§ 7·21 **एक प्रतल–अनेक लंबरेषा :**

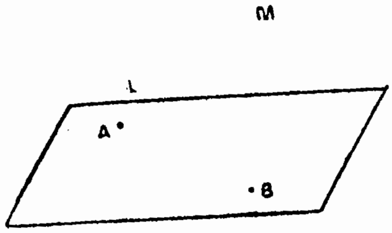
प्रतलाच्या एका बिंदूत त्या प्रतलास लंबरेषा कशी काढता येते हे आपल्याला माहीत आहे. एका बिंदूतून अशी एकच रेषा त्या प्रतलाला लंब असते हेही आपल्याला माहीत आहे.

आता प्रतलाच्या वेगवेगळ्या बिंदूंमध्ये त्या प्रतलाला अशा अनेक लंबरेषा काढल्या आहेत असे समजा. या रेषांचे आणखी गुणधर्म आता आपण पाहणार आहोत.



आ. 7·29

खालील आकृतीत प्रतल E ला त्याच्या A बिंदूमध्ये लंब असणारी L रेषा दाखवली असून B बिंदूमध्ये लंब असणारी M रेषा दाखवली आहे.



आ. 7·30

तुमच्या वर्गाच्या खोलीचे चार उभे कोपरे हे याच प्रकारे खोलीच्या तळास लंब असतात. यांपैकी दोन कोपरे हे खोलीच्या एखादया भिंतीत समाविष्ट आहेत का पाहा. चार कोपऱ्यांपैकी कोणतेही दोन कोपरे विचारात घेतल्यास त्यांना समाविष्ट करणारी भिंत आहेच काय ?

ज्या दोन कोपऱ्यांना समाविष्ट करणारी भिंत नाही त्यांना समाविष्ट करणारी भिंत घालता येईल काय ?

या उदाहरणातील 'कोपरे' हे रेषांचे प्रतिनिधित्व करतात व भिंती प्रतलांचे प्रतिनिधित्व करतात असे समजा. दोन कोपऱ्यांना समाविष्ट करणारी भिंत **आहे,** याचा गणिताच्या भाषेत अर्थ, 'त्या दोन रेषांना समाविष्ट करणारे प्रतल **आहे**' असा होतो.

व्याख्या : एकप्रतलीय रेषा

दिलेल्या रेषांना समाविष्ट करणारे जर एखादे प्रतल असेल, तर त्यांना **एकप्रतलीय रेषा** (Coplanar Lines) म्हणतात.

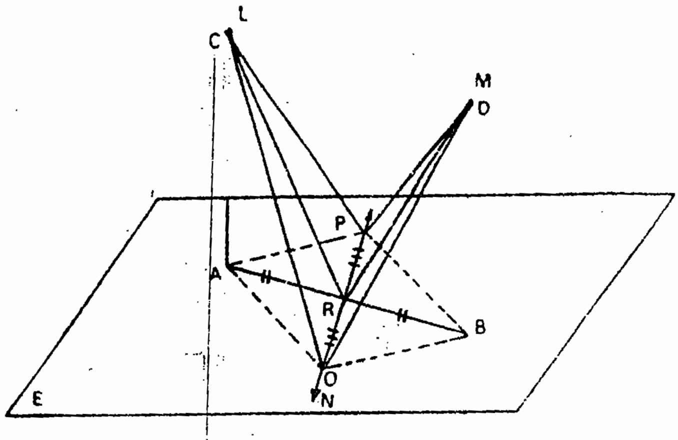
आता, सुरुवातीस घेतलेल्या खोलीच्या उदाहरणातील दोन कोपरे म्हणजे ज्या रेषा आहेत त्यांना 'एकप्रतलीय रेषा' असे आपण म्हणू शकू. ह्या दोन रेषा खोलीच्या तळाच्या प्रतलास लंब सुद्धा आहेत.

एकाच प्रतलास लंब असणाऱ्या कोणत्याही दोन रेषा एकप्रतलीय असतातच काय ? पुढील प्रमेय ह्या प्रश्नाचे उत्तर होकारार्थी देते.

§ 7·22 ▪ **प्रमेय :**

एकाच प्रतलास लंब असणाऱ्या दोन रेषा एकप्रतलीय असतात.

पक्ष : L रेषा, प्रतल E ला A बिंदूत लंब आहे व M रेषा, प्रतल E ला B बिंदूत लंब आहे.



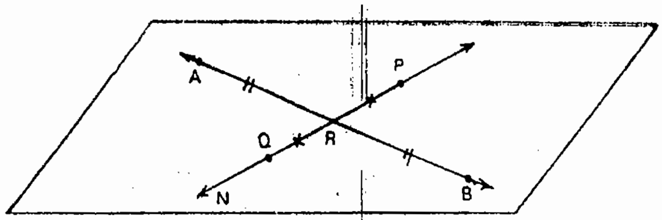
आ. 7·31

साध्य : L आणि M ह्या रेषा एकप्रतलीय आहेत. (म्हणजे L आणि M या दोन्ही रेषांना समाविष्ट करणारे एक तरी प्रतल असतेच हे सिद्ध करायचे आहे.)

सिद्धता :

1. A व B हे दोन्ही बिंदू प्रतल E मध्ये आहेत......... (पक्ष)

म्हणून (सपाट प्रतलाच्या गृहीतकानुसार) रेख AB, प्रतल E मध्ये समाविष्ट आहे.



आ. 7·32

समजा R हा रेख AB चा मध्यबिंदू आहे. R बिंदूतून जाणारी रेख AB ला लंब असणारी आणि प्रतल E मध्ये समाविष्ट असणारी एक व फक्त एकच रेषा असते. ती रेषा N आहे असे समजा

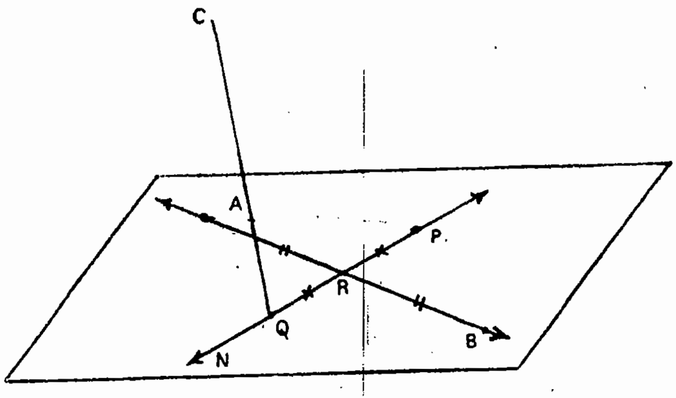
N रेषेवर R बिंदूच्या विरुद्ध अंगास दोन बिंदू P व Q असे घ्या की, $l(RP) = l(RQ)$.

2. रेषा AB म्हणजे रेख PQ चा प्रतल E मधील लंबदुभाजक होय.

∴ बिंदू A हा P व Q यांपासून समदूर आहे.

म्हणजेच $l(AP) = l(AQ)$

रेख PQ च्या लंबदुभाजक प्रतलात L व M या दोन्ही रेषा आहेत हे आपण सिद्ध करणार आहोत. रेषा L ही रेख PQ च्या लंबदुभाजक प्रतलात आहे हे दाखविण्यासाठी L वरील प्रत्येक बिंदू हा PQ च्या लंबदुभाक प्रतलात आहे हे आपण सिद्ध करू. त्याकरिता L चा प्रत्येक बिंदू हा P व Q पासून समदूर आहे हे सिद्ध करावे लागेल.



आ. 7·33

L चा A हा बिंदू P व Q यांपासून समदूर आहे हे सिद्ध झालेच आहे. त्याखेरीज इतर कोणताही C हा बिंदू रेषा L वर आपण घेऊ. त्यायोगे △ ACQ व △ ACP मिळतात. या त्रिकोणांमध्ये, रेख AC समाईक

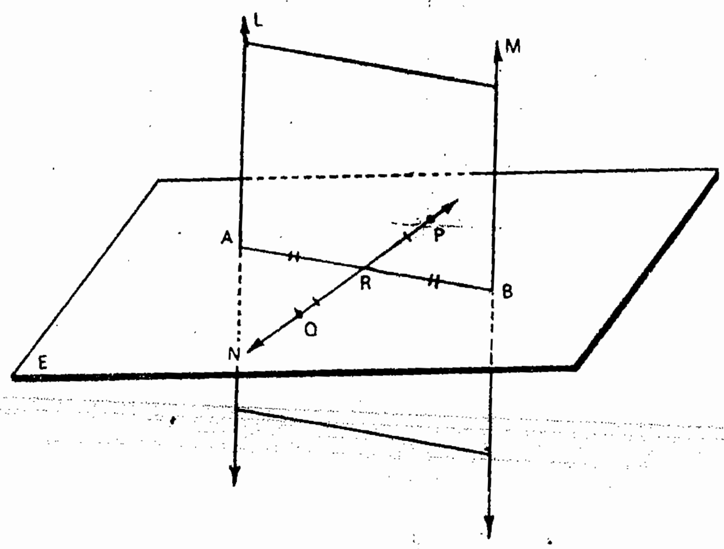
रेख AQ ≅ रेख AP

∠ CAQ ≅ ∠ CAP

△ ACQ ≅ △ ACP   बाकोबा गृहीतकानुसार

∴ l (CQ) ≅ l (CP)

म्हणजेच, C हा बिंदू P व Q यांपासून समदूर ठरतो. याप्रमाणे आता रेषा L चा प्रत्येक बिंदू रेख PQ च्या लंबदुभाजक प्रतलात आहे हे सिद्ध झाले.



आ. 7·34

याच पद्धतीने रेषा M चाही प्रत्येक बिंदू रेख PQ च्या लंबदुभाजक प्रतलात आहे हे सिद्ध करता येते.

3. रेषा L आणि रेषा M ह्या दोहोंना समाविष्ट करणारे एक प्रतल आहे; (म्हणजे त्या रेषा एकप्रतलीय आहेत) हे सिद्ध झाले.

§ 7·23 **प्रश्न :**

1. वरील प्रमेयाच्या सिद्धतेत–'L ⊥ E' या पक्षातील माहितीचा उपयोग कोठे व कशासाठी करून घेतला आहे ते शोधा.
2. रेषा M च्या, E प्रतलास लंब असण्यावरच कोणत्या बिंदूंचे प्रतल RAC मध्ये असणे अवलंबून आहे ?
3. E प्रतलास A व B मध्ये छेदणाऱ्या कोणत्याही दोन रेषा एकप्रतलीय असतीलच याची खात्री का देता येत नाही ?
4. रेषा AB च्या कोणत्याही K बिंदूत E प्रतलास लंबरेषा काढल्यास ती सुद्धा प्रतल RAC मध्येच समाविष्ट असेल काय ? असल्यास सिद्ध करा.
5. E प्रतलास A व B या बिंदूंमध्ये छेदणाऱ्या दोन रेषा 'एकप्रतलीय' आहेत याचा अर्थ त्यांपैकी प्रत्येक रेषा ही E प्रतलास लंबरेषा असलीच पाहिजे काय ? जर त्यांपैकी एक लंबरेषा असेल तर मग दुसरीही लंबरेषा असलीच पाहिजे काय ?

§ 7·24 टेबलावर त्याच्या कोणत्याही बिंदूच्या ठिकाणी पेन्सिल **सरळ** उभी ठेवता येते काय ? ठेवता येते हा अनुभव आहे. तर, 'प्रतलास त्याच्या प्रत्येक बिंदूत एक लंबरेषा असावयासच पाहिजे' हा आपला तर्क स्वाभाविक आहे.

§ 7·25 ■ **प्रमेय :**

कोणत्याही प्रतलास त्यावरील दिलेल्या बिंदूतून जाणारी एक लंबरेषा असते.

समजा, E हे एक दिलेले प्रतल आहे व A हा प्रतल E चा एक दिलेला बिंदू आहे.

सिद्ध करायचे आहे की A बिंदूतून जाणारी व प्रतल E ला लंब असणारी एकतरी रेषा आहे.

(मागे परिच्छेद 7·13 मध्ये म्हटल्याप्रमाणे येथेही आपण ती रेषा कशी काढावी याची रचना सांगणार आहोत.)

E प्रतलात राहणारी व A बिंदूतून जाणारी L ही एक रेषा घ्या.

L रेषेला तिच्या A बिंदूतून जाणारे एकच लंबप्रतल असते. समजा ते प्रतल F आहे.

अर्थातच, A बिंदूतून जाणाऱ्या व F प्रतलात असणाऱ्या प्रत्येक रेषेला रेषा L ही लंब आहे.

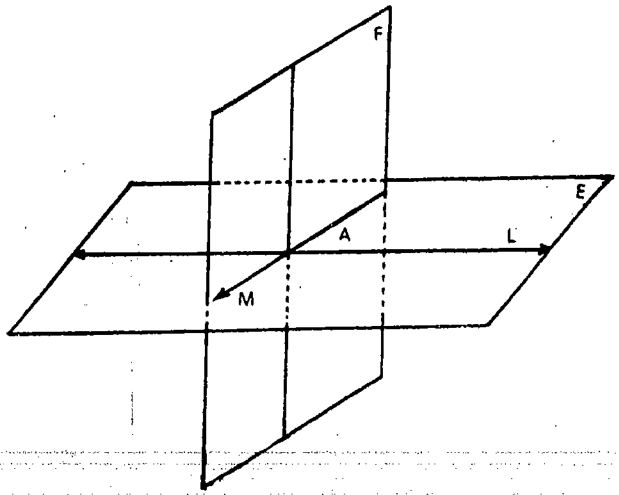
E व F या दोन प्रतलांचा छेद असणारी रेषा घ्या. समजा ती रेषा M आहे.

आता या M रेषेला तिच्यावरील A बिंदूत लंब असलेले प्रतल घ्या. समजा ते प्रतल G आहे. (आ. 7·36 पाहा.)

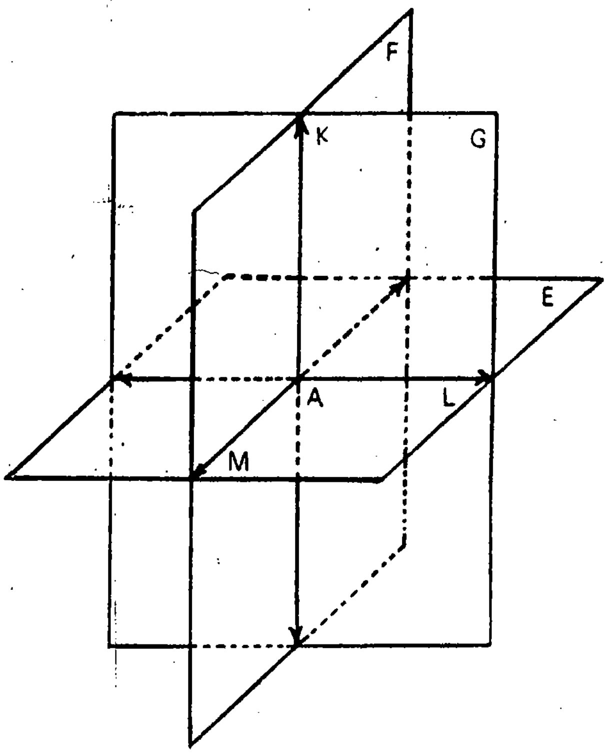
(प्रतल G व रेषा L ही दोन्ही, रेषा M ला तिच्या A बिंदूत लंब असल्यामुळे साहजिकच L रेषा प्रतल G मध्ये समाविष्ट आहे.)

अर्थातच, A बिंदूतून जाणाऱ्या व G प्रतलात असणाऱ्या प्रत्येक रेषेला रेषा M ही लंब आहे.

G व F ही दोन भिन्न प्रतले असून A हा त्यांचा एक समाईक बिंदू आहे. म्हणजे हा बिंदू G व F यांच्या छेदनरेषेवर असतो. समजा G व F यांची ही छेदनरेषा K आहे. अर्थातच K ⊥ M (A वर) शिवाय, K ⊥ L (A वर) हे पूर्वी सिद्ध केलेलेच आहे. अशा रीतीने प्रतल E मधील L आणि M ह्या दोन रेषांपैकी प्रत्येकीस तिच्या छेदनबिंदूच्या ठिकाणी K ही रेषा लंब आहे. म्हणून, K रेषा ही प्रतल E ला लंब असली पाहिजे हे उघड आहे. तेव्हा K हीच आपल्याला हवी असणारी रेषा होय.

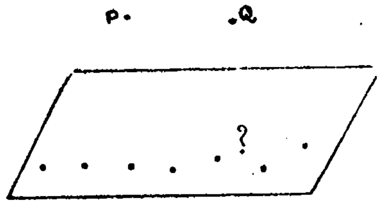


आ. 7·35



आ. 7·36

§ **7·26** **प्रतलाच्या प्रत्येक दिलेल्या बिंदूच्या ठिकाणी** त्या प्रतलास एक लंबरेषा असतेच. तेव्हा प्रतलाच्या कोणत्या ना कोणत्या बिंदूतून काढलेली प्रतलाची लंबरेषा या प्रतलाबाहेरील दिलेल्या बिंदूतून जायला हवीच हे आपल्याला जाणवते. हेच पुढील प्रमेयात सांगितले आहे.



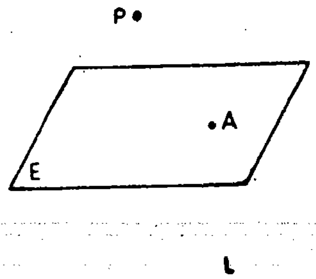
आ. 7·37

§ 7·27 ▪ **प्रमेय :**

कोणत्याही प्रतलाबाहेरच्या दिलेल्या बिंदूतून जाणारी व त्या प्रतलास लंब असणारी एक रेषा असतेच.

समजा, E हे एक दिलेले प्रतल आहे व त्यात समाविष्ट नसणारा P हा एक बिंदू आहे.

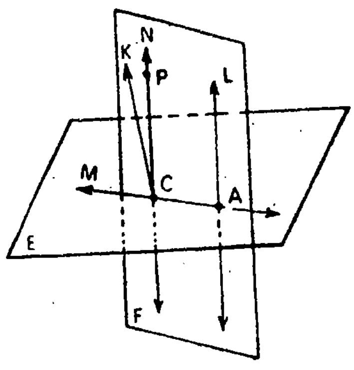
P बिंदूतून जाणारी व प्रतल E ला लंब असणारी रेषा काढता येते हे आपल्याला दाखवायचे आहे.



आ. 7·38

E प्रतलात कोठेही एक बिंदू घ्या. समजा तो A आहे. A बिंदूतून जाणारी व E प्रतलास लंब असणारी रेषा काढा. समजा ती L आहे. (L रेषा जर P बिंदूतून जात असेल तर प्रश्नच मिटला. L हीच आपल्याला हवी असलेली रेषा होईल.)

ही L रेषा P बिंदूतून जात नसेल तर ती रेषा व तो बिंदू एक प्रतल निश्चित करतात. ते प्रतल समजा F आहे. F आणि E ही परस्पर भिन्न पण छेदक प्रतले आहेत. समजा M ही रेषा म्हणजे या दोन प्रतलांचा छेद आहे.



आ. 7·39

F प्रतलात P बिंदूतून M रेषेवर एक लंबरेषा काढा. ती समजा N आहे. या लंबाचा पाया (Foot) C हा बिंदू आहे असे समजा. प्रतल E मधील C या बिंदूच्या ठिकाणी E प्रतलास एक लंबरेषा काढा. (काढता येते हे आपण पाहिले आहे.) समजा ही रेषा K आहे.

आता रेषा K व रेषा L ह्या प्रतल E ला लंब आहेत. म्हणून त्या एकप्रतलीय आहेत.

समजा K व L यांना सामावणारे हे प्रतल G आहे. G व F ही भिन्न प्रतले नसून ती एकच आहेत हे आता आपण पाहू.

L रेषा व तिच्याबाहेरील C हा बिंदू F व G या दोन्ही प्रतलांत आहेत. पण एक रेषा व तिच्याबाहेरील एक बिंदू यांनी तर एकच प्रतल निश्चित होते. त्यामुळे F = G.

म्हणून, रेषा K ही प्रतल F मध्ये असायलाच हवी. K रेषा ही M रेषेस बिंदू C मध्ये लंब आहे. (कारण K रेषा ही प्रतल E ला लंब आहे व प्रतल E मधील M रेषा C बिंदूतून जाते.)

F या प्रतलाचा विचार करा. या प्रतलात M रेषेला तिच्या C या एकाच बिंदूतून दोन भिन्न लंबरेषा राहणे शक्य नाही. त्यामुळे N = K असलेच पाहिजे. म्हणजे रेषा PC ही प्रतल E ला लंब असली पाहिजे.

§ **7·28** दिलेला बिंदू दिलेल्या प्रतलात समाविष्ट असो अगर नसो, त्या बिंदूतून जाणारी व त्या प्रतलास लंब असणारी एक रेषा काढता येतेच हे आपण आतापर्यंत अभ्यासले, पण दिलेल्या बिंदूतून, दिलेल्या प्रतलाला लंब असणारी अशी एकच रेषा काढता येते, की एकापेक्षा जास्त लंबरेषा काढता येतात ?

प्रतलाच्या लंबरेषेची एकमेवता पुढील प्रमेयात सांगितली आहे.

§ 7·29 ▪ **प्रमेय :**

कोणत्याही प्रतलातील दिलेल्या बिंदूत त्या प्रतलास एकाहून जास्त लंबरेषा नसतात.

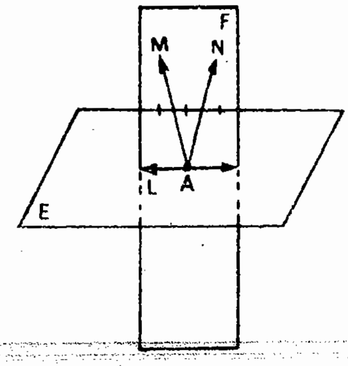
समजा, प्रतल E मध्ये A हा एक दिलेला बिंदू आहे व समजा M आणि N या दोन भिन्न रेषा, A या बिंदूतून जातात व त्या प्रतल E ला लंब आहेत.

समजा M आणि N या छेदक रेषांनी निश्चित केलेले प्रतल F आहे.

F आणि E या प्रतलांची छेदनरेषा, समजा L आहे.

तर मग प्रतल F मध्ये समाविष्ट असणाऱ्या L रेषेला त्या रेषेवरील A या एकाच बिंदूत M व N या F प्रतलातील दोन रेषा लंब असतात. पण हे तर अशक्य आहे.

यावरून E प्रतलास A बिंदूतून दोन लंबरेषा असणे शक्य नाही.



आ. 7·40

§ 7·30 ▪ **प्रमेय :**

कोणत्याही प्रतलाबाहेरील दिलेल्या बिंदूतून जाणाऱ्या व त्या प्रतलास लंब असणाऱ्या रेषा एकापेक्षा जास्त नसतात.

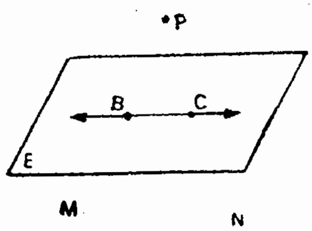
समजा प्रतल E च्या बाहेरचा P हा एक बिंदू आहे. समजा या P बिंदूतून जाणाऱ्या दोन रेषा M व N ह्या प्रतल E ला लंब आहेत. अनुक्रमे B व C हे त्यांचे पाद आहेत असे समजा.

पुढील प्रश्नांची उत्तरे शोधा.

(1) रेषा M ही रेषा BC ला लंब असलीच पाहिजे काय ?

(2) रेषा N ही रेषा BC ला लंब असलीच पाहिजे काय ?

(3) P ह्या एकाच बाह्यबिंदूतून रेषा BC ला दोन भिन्न लंबरेषा असू शकतात काय ?

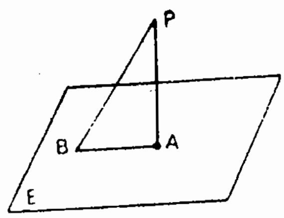


आ. 7·41

या प्रश्नांच्या उत्तरावरून आपल्या लक्षात येते की (बाह्यबिंदूतून दिलेल्या रेषेस दोन भिन्न लंबरेषा निघू शकत नसल्यामुळे) P बिंदूतून जाणाऱ्या एकापेक्षा जास्त रेषा प्रतल E ला लंब राहू शकणार नाहीत.

§ **7·31** प्रतलाच्या बाहेर दिलेल्या एका बिंदूतून त्या प्रतलात एक व एकच-लंबरेषा असते हे आपण सिद्ध केले आहे. समजा E हे दिलेले प्रतल असून P हा त्या प्रतलाबाहेरचा एक बिंदू आहे. P मधून प्रतल E ला लंब काढलेली रेषा त्या प्रतलास A या बिंदूत छेदते असे समजा.

B हा प्रतल E चा, A पासून भिन्न असा एक बिंदू आहे.



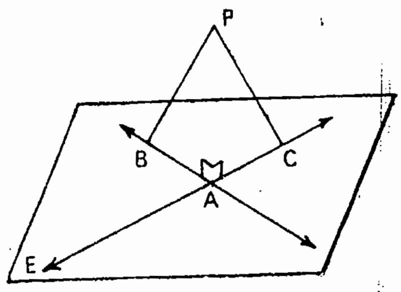
आ. 7·42

रेख PB आणि रेख PA यांच्या लांबींची तुलना करा. B बिंदू प्रतल E मध्ये वेगवेगळ्या ठिकाणी घेऊन पाहा. दरवेळी रेख PA हा रेख PB पेक्षा लहानच राहील.

पुढील प्रमेयात हेच सांगितले आहे.

§ 7·32 ▪ **प्रमेय :**

एखादे प्रतल व त्या बाहेरील एक बिंदू दिला असेल तर त्या बिंदूपासून प्रतलापर्यंत काढलेल्या रेषाखंडांत, लंबरेषाखंड हा सर्वांत लहान असतो.



आ. 7·43

P हा प्रतल E मध्ये समाविष्ट नसणारा एक दिलेला बिंदू आहे. प्रतल E मध्ये असणारा बिंदू A असा आहे की रेख PA ⊥ प्रतल E.

E या प्रतलातील B हा एक दुसरा कोणताही बिंदू आहे. तर सिद्ध करायचे आहे की, $l\,(AP) < l\,(BP)$.

सिद्धता :

रेख PA ⊥ प्रतल E असल्यामुळे रेख PA ⊥ रेख AB.

∴ △ PAB काटकोन त्रिकोण आहे.

या काटकोन त्रिकोणाचा, रेख PB हा कर्ण आहे व रेख PA ही एक भुजा आहे.

कर्ण ही काटकोन त्रिकोणाची सर्वांत मोठी भुजा असल्यामुळे $l\,(PA) < l\,(PB)$.

याप्रमाणे, रेख PB सारखा कोणताही रेषाखंड विचारात घेतला तरी रेख PA हा त्यापेक्षा लहानच राहील.

§ 7·33 **व्याख्या :**

बाह्यबिंदूपासून प्रतलापर्यंत काढलेल्या लंबरेषाखंडाच्या लांबीस त्या बाह्यबिंदूचे त्या **प्रतलापासूनचे अंतर** म्हणतात.

आपण काय शिकलो ?

(1) **संज्ञा-व्याख्या :**

रेषा व प्रतल यांतील लंबता; लंबप्रतल; लंबदुभाजक प्रतल; एकप्रतलीय रेषा; बिंदूचे रेषेपासूनचे अंतर; बिंदूचे प्रतलापासूनचे अंतर.

(2) **कल्पना :**

पूर्वप्रमेय

(3) **प्रमेय :**

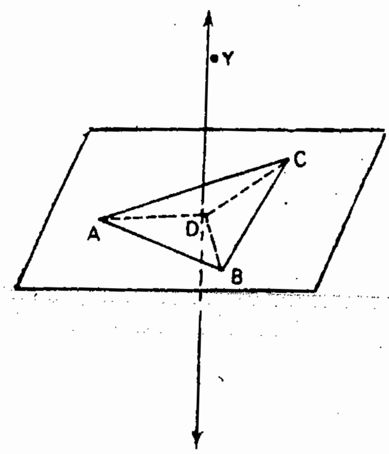
(i) दिलेल्या दोन बिंदूंपासून समदूर असलेल्या दोन बिंदूंच्या दरम्यानचा बिंदू (ii) प्रतल व रेषा यांच्यातील लंबता (iii) लंबप्रतलाचे अस्तित्व (iv) लंबप्रतलाचे एकमेवत्व (v) रेषाखंडाचे लंबदुभाजक प्रतल (vi) एकाच प्रतलास लंब असणाऱ्या रेषा (vii) प्रतलास त्यावरील दिलेल्या बिंदूतून जाणारी लंबरेषा (viii) प्रतलाबाहेरील बिंदूतून प्रतलास लंब असणारी रेषा (ix) बाह्य बिंदूपासून प्रतलापर्यंत काढलेला रेषाखंड.

प्रश्नसंग्रह

1. पुढील विधानांची सत्यासत्यता पडताळून पाहा. (आवश्यक वाटल्यास आकृती काढून पाहा.)
   (i) एक रेषा एका प्रतलास फक्त एका बिंदूत छेदत आहे, पण ती त्याला लंब नाही, तर त्या प्रतलात कमीतकमी दोन रेषा अशा आहेतच की ज्यांपैकी प्रत्येक रेषा त्या दिलेल्या रेषेस लंब आहे.
   (ii) तीन रेषा एकाच बिंदूत परस्परांस छेदून जोडीजोडीने लंबरूप राहू शकतात.
   (iii) प्रतलातील दिलेल्या बिंदूतून जाणारी फक्त एकच रेषा त्या प्रतलास लंब असते.

2. पुढील विधाने सैदव खरीच असतात काय? नसल्यास केव्हा खरी नसतात ते सांगा.
   (i) दिलेल्या रेषेला तिच्या दिलेल्या एकाच बिंदूतून दोन लंबरेषा काढता येतात.
   (ii) दिलेल्या रेषेला तिच्या दिलेल्या एकाच बिंदूतून दोन लंबप्रतले काढता येतात.
   (iii) एकाच रेषेला दोन लंबप्रतले काढता येतात.
   (iv) दिलेल्या प्रतलास लंब असणाऱ्या दोन परस्परछेदक रेषा काढता येतात.

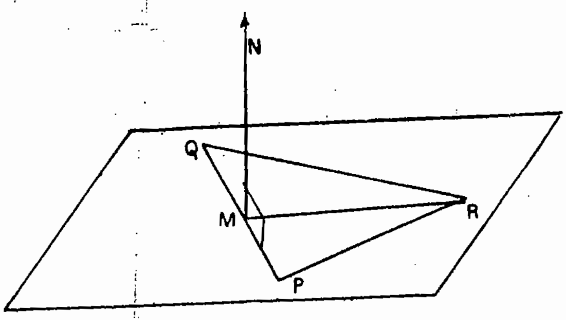
3. ABC प्रतलात D बिंदू हा A, B व C यांच्यापासून समदूर आहे. रेषा L ही D बिंदूतून जाते व ती प्रतल ABC ला लंब आहे. Y हा, रेषा L चा कोणताही एक बिंदू आहे. Y बिंदू, A, B व C या बिंदूंपासून समदूर असेल काय?



आ. 7·44

4. △ PQR च्या प्रतलास लंब असणाऱ्या रेषेचा एक बिंदू जर P, Q व R या बिंदूंपासून समदूर असेल तर त्या लंबरेषेचा प्रत्येक बिंदू हा P, Q व R यांच्यापासून समदूर असलाच पाहिजे काय?

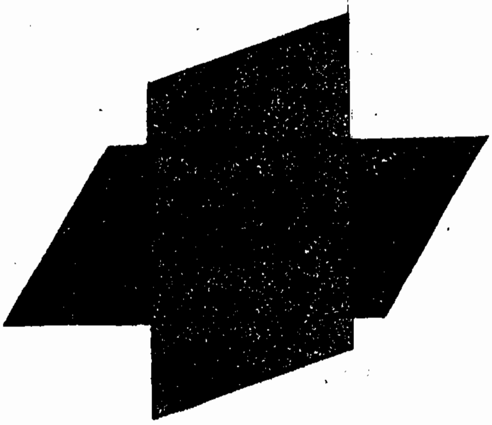
5. बाजूच्या आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे △ PQR मध्ये l (PR) = l (QR). M हा रेख PQ चा मध्यबिंदू आहे. △ PQR च्या प्रतलाबाहेर N हा असा बिंदू आहे की, रेषा NM ⊥ रेख PQ तर,
(i) रेषा NM ⊥ प्रतल PQR हे खरे आहे काय? (ii) रेषा QM ⊥ प्रतल NMR हे खरे आहे काय? (iii) रेषा MR ⊥ प्रतल NPQ हे खरे आहे काय? (iv) N बिंदू, रेख PQ च्या लंबदुभाजक प्रतलात असलाच पाहिजे काय?



आ. 7·45

6. काटकोन त्रिकोणाच्या कर्णाच्या एका टोकातून, त्या त्रिकोणाच्या प्रतलास लंबरेषा काढल्यास त्या रेषेचा कोणताही बिंदू व त्रिकोणाचा काटकोन करणारा बिंदू यांना सांधणारा रेषाखंड, हा त्या त्रिकोणाच्या एका भुजेस लंब असतो.
आकृती काढून ती भुजा ओळखा व दिलेले विधान सिद्ध करा.

7. प्रतल E मध्ये P, Q, R हे तीन बिंदू दिले असून $l(QP) > l(QR)$. बिंदू Q मधून जाणाऱ्या व प्रतल E ला लंब असणाऱ्या रेषेचा M हा एक बिंदू आहे. सिद्ध करा की, $l(MP) > l(MR)$.



आ. 7·46

8. रेषा L ही प्रतल E ला बिंदू A मध्ये छेदते. $L \perp E$. M ही एक रेषा, A मधून जाते व प्रतल E मध्ये समाविष्ट आहे. तर M च्या कोणत्याही बिंदूत, तिला प्रतल E मध्ये लंब काढलेली रेषा, L व M यांच्या प्रतलास लंब असते काय? (आ. 7·46 पाहा.)

9. E प्रतलातील दोन भिन्न रेषांपैकी प्रत्येकीस लंब असणारी रेषा, E प्रतलास केव्हा लंब असेल?

पारिभाषिक शब्द

पूर्वप्रमेय – Lemma

लंबदुभाजक प्रतल – Perpendicular Bisecting plane

उदा. 2 :

प्रकरण 8

प्रतलातील समांतर रेषा

§ 8·1 उजळणी :

आतापर्यंतच्या भूमितीच्या अभ्यासात आपण फक्त परस्परांस छेदणाऱ्या रेषांचा (व प्रतलांचा) अभ्यास केला. पण प्रत्येक वेळी ह्या रेषा (व ही प्रतले) परस्परांस छेदणाऱ्या असतीलच असे नाही. न छेदणाऱ्या रेषांचा (व प्रतलांचा) अभ्यासही फार महत्वाचा आहे. आणि त्यामुळे मनोरंजक भूमितीय आकृत्यांचे विविध गुणधर्म आपणास कळू शकतील. या प्रकरणात एकाच प्रतलातील, परस्परांस न छेदणाऱ्या रेषांचा आपण अभ्यास करणार आहोत.

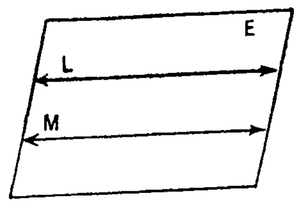
पहिल्या प्रकरणातील प्रमेय 1·17 पाहा.

'एकमेकींना छेदणाऱ्या दोन भिन्न रेषांमधून एक आणि एकच प्रतल जाते,' असे त्या प्रमेयाचे विधान आहे. याचाच अर्थ 'एकमेकांना छेदणाऱ्या दोन भिन्न रेषा एकाच प्रतलात असतात' असा होतो. आता एकाच प्रतलात असणाऱ्या सर्वच रेषा एकमेकींना छेदतील का ?

आठव्या वर्गाच्या अभ्यासात आपणास, एका प्रतलात असलेल्या पण एकमेकींना न छेदणाऱ्या रेषांची थोडी ओळख झालेलीच आहे. एका प्रतलात असलेल्या सर्व रेषा एकमेकींना छेदतातच असे नाही. ज्या एकप्रतलीय रेषा एकमेकींना छेदत नाहीत त्यांना आपण समांतर रेषा म्हणतो.

व्याख्या : समांतर रेषा (Parallel Lines)

प्रतलातील ज्या रेषा एकमेकींना छेदत नाहीत त्यांना **समांतर रेषा** म्हणतात.



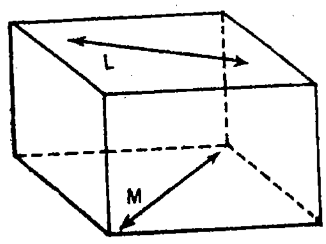
आ. 8·1

आ. 8·1 मध्ये E ह्या प्रतलातील रेषा L व रेषा M ह्या समांतर रेषा दाखवल्या आहेत.

दोन रेषा समांतर असण्यासाठी दोन गोष्टी आवश्यक आहेत हे व्याख्येवरून स्पष्ट होते.

(i) त्या दोन रेषा एकाच प्रतलात असाव्यात.

(ii) त्या दोन रेषा परस्परांना छेदणाऱ्या नसाव्यात.



आ. 8·2

आ. 8·2 मध्ये रेषा L व रेषा M ह्या दोन रेषा एका प्रतलात नाहीत. अशा रेषांना कोणत्या रेषा म्हणतात ? या रेषा एकमेकींना छेदतात का ?

व्याख्या : वितलीय किंवा नैकप्रतलीय रेषा (Skew Lines)
एका प्रतलात नसलेल्या रेषांना **वितलीय** रेषा म्हणतात.

आ. 8·2 मध्ये रेषा L व रेषा M हया एका प्रतलात नाहीत. म्हणून त्या वितलीय रेषा आहेत. हया रेषा एकमेकींना छेदत नाहीत हे उघड आहे. आ. 8·2 मधील वितलीय रेषांच्या इतर जोड्या त्यांची नावे देऊन लिहा.

वरील चर्चेवरून, एकमेकींना न छेदणाऱ्या रेषा एका प्रतलात असतील तर त्यांना समांतर रेषा म्हणतात व एका प्रतलात नसतील तर त्यांना वितलीय रेषा म्हणतात, हे तुमच्या लक्षात आलेच असेल.

§ 8·2 प्रश्न :

1. **खालीलपैकी कोणती विधाने सत्य आहेत?**
   (i) जर दोन रेषा एकमेकींना छेदत नसतील तर त्या रेषा समांतर असतात.
   (ii) जर रेषा L व रेषा M हया समांतर असतील तर त्या एकप्रतलीय असतात.
   (iii) जर दोन रेषा समांतर नसतील तर त्या एका प्रतलात नसतात.
   (iv) एका प्रतलात असलेल्या पण एकमेकींना न छेदणाऱ्या अवकाशातील रेषांना वितलीय रेषा म्हणतात.

2. **खाली दिलेल्या प्रत्येक प्रश्नाची चार संभाव्य उत्तरे दिली आहेत. त्यांपैकी जास्तीत जास्त योग्य उत्तर निवडा व ते त्या प्रश्नासमोरील रिकाम्या जागी लिहा.**

   (a) एका प्रतलात काढलेल्या कोणत्याही दोन रेषा परस्परांस ——————
   (i) छेदतात किंवा समांतर असतात. (ii) छेदतात आणि समांतर असतात.
   (iii) नेहमीच छेदतात. (iv) नेहमीच समांतर असतात.

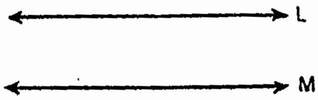
   (b) जर दोन भिन्न रेषा परस्परांस छेदत असतील तर त्या ——————
   (i) दोन बिंदूंत छेदतात. (ii) एकाच बिंदूत छेदतात.
   (iii) एका बिंदूत छेदतात. (iv) अनेक बिंदूंत छेदतात.

   (c) दोन रेषा समांतर असतील तर त्या ——————
   (i) परस्परांस छेदतात. (ii) परस्परांस छेदणार नाहीत असे नाही.
   (iii) परस्परांस छेदत नाहीत. (iv) याशिवाय वेगळे उत्तर.

   (d) एका प्रतलातील दोन रेषा परस्परांस छेदत नसतील तर त्या रेषा ——————
   (i) समांतर नसतात. (ii) वितलीय असतात.
   (iii) समांतर असतात. (iv) याशिवाय वेगळे उत्तर.

   (e) दोन वितलीय रेषा ——————
   (i) एकाच प्रतलात असतात. (ii) एका प्रतलात असू शकतात.
   (iii) दोन भिन्न प्रतलांत असतात. (iv) याशिवाय वेगळे उत्तर.

§ 8·3 आ. 8·3 मध्ये रेषा L व रेषा M ह्या रेषा समांतर आहेत. हे विधान, रेषा L || रेषा M असे लिहितात. समांतरता दाखवण्यासाठी || हे चिन्ह वापरले आहे. 'रेषा AB || रेषा PQ' हे विधान, 'रेषा AB समांतर रेषा PQ' असे वाचतात.



आ. 8·3

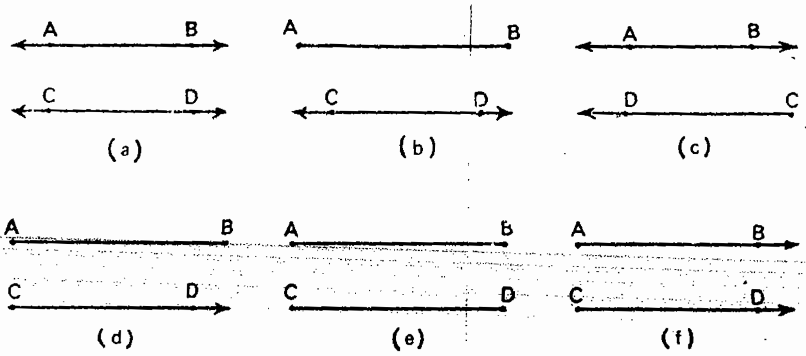
जर रेषा L ही रेषा M ला समांतर असेल तर रेषा M ही रेषा L ला समांतर असणारच.

म्हणजेच, रेषा L || रेषा M असेल तर, रेषा M || रेषा L असे होईल.

§ 8·4 रेषाखंडांची व किरणांची समांतरता :

दोन किरण किंवा दोन रेषाखंड किंवा एक किरण व एक रेषाखंड हे परस्परांस समांतर आहेत असे केव्हा म्हणता येईल ?

खालील आकृतीत एकूण सहा प्रकार दाखवले आहेत.



आ. 8·4

(a)	रेषाAB || रेषा CD	(d)	रेखAB || किरण CD
(b)	रेखAB || रेषा CD	(e)	रेखAB || रेख CD
(c)	रेषाAB || किरण CD	(f)	किरण AB || किरण CD.

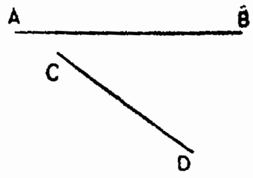
यावरून, दोन रेषांप्रमाणेच दोन रेषाखंड किंवा दोन किरण किंवा किरण व रेषाखंडदेखील परस्परांना समांतर असू शकतात. दोन रेषांचे हे भाग परस्परांना समांतर असण्यासाठी कोणत्या गोष्टीची आवश्यकता आहे ? अर्थातच, त्या भागांना समाविष्ट करणाऱ्या रेषा परस्परांना समांतर असणे हीच ती आवश्यक गोष्ट होय.

उदाहरणार्थ, आकृती (d) मध्ये रेख AB || किरण CD आहे; कारण रेख AB व किरण CD यांना समाविष्ट करणाऱ्या रेषा परस्परांना समांतर आहेत.

वरील चर्चेचा सारांश पुढे दिला आहे.

दोन रेषा परस्परांस समांतर असतील तर त्या रेषेचा कोणताही भाग (रेषाखंड, किरण किंवा ती रेषासुद्धा) हा दुसऱ्या रेषेस किंवा तिच्या कोणत्याही भागास (रेषाखंड, किरण) समांतर असतो.

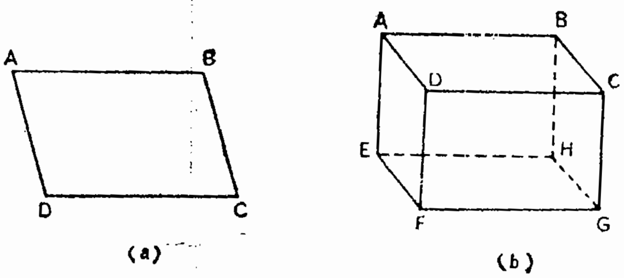
याच संबंधात असेही सांगता येईल की, ज्यावेळेस दोन रेषाखंड किंवा दोन किरण अथवा एक रेषाखंड व एक किरण परस्परांस समांतर असतील त्यावेळेस त्यांना समाविष्ट करणाऱ्या रेषाही परस्परांस समांतर असल्या पाहिजेत.



आ. 8·5

आता आ. 8·5 मध्ये रेख AB व रेख CD हे दोन रेषाखंड एकाच प्रतलात असून एकमेकांस छेदत नाहीत. मग हे रेषाखंड समांतर आहेत का? वर झालेल्या चर्चेवरून हे स्पष्ट होईल की, हे रेषाखंड जरी एकमेकांना छेदत नसले तरी त्यांना समाविष्ट करणाऱ्या रेषा एकमेकांना छेदतात. त्यामुळे त्या रेषा समांतर नाहीत व म्हणून त्यांचे भाग—म्हणजेच हे रेषाखंडही समांतर नाहीत.

पुढील अभ्यासात आपणास समांतर रेषाखंडांचा बराच वापर करावा लागणार आहे. उदाहरणार्थ, खाली दाखवलेल्या आ. 8·6 मधील (a) ही आकृती समांतरभुज चौकोनाची आहे हे तुम्ही जाणताच.



आ. 8·6

यात रेषाखंडाच्या कोणत्या जोडया समांतर आहेत? हे रेषाखंड परस्परांस समांतर आहेत याचा अर्थ काय? त्यांना समाविष्ट करणाऱ्या रेषांबद्दल काय सांगता येईल? आकृती (b) मध्ये समांतर रेषाखंडांच्या किती जोडया सांगता येतील?

§ 8·5 समांतर रेषांची व्याख्या आपण खालीलप्रमाणे केली आहे.

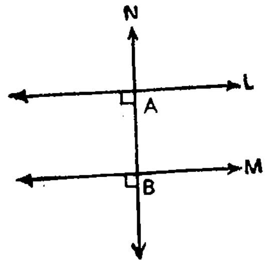
'एका प्रतलातील, परस्परांना न छेदणाऱ्या रेषांना समांतर रेषा म्हणतात.'

पण व्याख्येत सांगितल्याप्रमाणे दोन रेषा खरोखरच समांतर आहेत किंवा नाहीत हे सांगणे सोपे नाही. कारण दोन रेषा एकमेकींना छेदतात किंवा छेदत नाहीत हे रेषाखंड पाहून सांगता येणार नाही. रेषा ही दोन्ही दिशांनी अमर्याद असल्याने दोन रेषा छेदतात किंवा नाही हे पाहण्यासाठी या दोन्ही, अमर्याद लांबीच्या संपूर्ण रेषांची परीक्षा करावी लागेल व ते अशक्य आहे. तसेच आकृतीवरून ज्या रेषा छेदणाऱ्या वाटत नाहीत त्या पुढे परस्परांना छेदणारच नाहीत असे निश्चित सांगता येत नाही. त्यामुळे, 'परस्परांना न छेदणाऱ्या रेषा' ही जी समांतर रेषांसंबंधीची अट आहे ती पडताळून पाहणे मुळीच सोपे नाही. त्यासाठी समांतर रेषांसंबंधीचा असा एखादा गुणधर्म माहीत असणे आवश्यक आहे की, जो आपणांस पडताळून पाहता येईल व दोन रेषांच्या समांतरतेची खात्री देण्यास पुरेसा होईल. रेषांच्या समांतरतेची खात्री देणारे असे अनेक गुणधर्म ओघाने येतीलच. त्यांपैकी एक गुणधर्म पुढे सांगितला आहे.

§ 8·6 ▪ प्रमेय : समांतर रेषांची कसोटी

एका प्रतलातील दोन रेषा जर त्या प्रतलातील एकाच रेषेला लंब असतील तर त्या दोन रेषा परस्परांना समांतर असतात.

पक्ष : रेषा L, रेषा M व रेषा N या एकाच प्रतलातील रेषा असून रेषा L ⊥ रेषा N आणि रेषा M ⊥ रेषा N आहे.



आ. 8·7

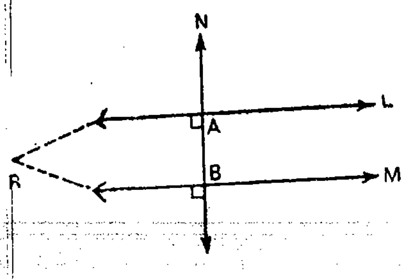
साध्य : रेषा L ∥ रेषा M.

सिद्धता : रेषा L व रेषा M ह्या दिलेल्या दोन एकप्रतलीय रेषा समांतर आहेत हे सिद्ध करायचे आहे. त्यासाठी त्या एकमेकींस छेदत नाहीत हे सिद्ध केले म्हणजे पुरेसे होईल. समजा, रेषा L व रेषा M ह्या परस्परांस R बिंदूत छेदतात (आ. 8·8).

छेदनबिंदू R हा रेषा N वर असेल किंवा रेषा N च्या बाहेर असेल.

रेषा L व रेषा M यांचा छेदनबिंदू R हा रेषा N वर आहे असे समजा.

म्हणजेच रेषा L ही रेषा N ला R बिंदूत छेदते. पण रेषा L व रेषा N ह्या परस्परांना A बिंदूत छेदतात. दोन रेषा परस्परांना एकाच बिंदूत छेदत असल्याने A आणि R हे एकच बिंदू होत. त्याचप्रमाणे B आणि R हे एकच बिंदू होत. पण मग A व B हे एकच बिंदू आहेत असे म्हटले पाहिजे. पण A व B हे भिन्न बिंदू आहेत, म्हणून R हा बिंदू N वर नसला पाहिजे.



आ. 8·8

म्हणजे त्या रेषांचा छेदनबिंदू R हा रेषा N च्या बाहेर आहे.

म्हणून रेषा RA व रेषा RB या दोन रेषा R या बिंदूपासून रेषा N वर लंब आहेत. पण हे लंबरेषा रचनेच्या दुसऱ्या प्रमेयाशी विसंगत आहे. कारण या प्रमेयानुसार रेषेबाहेरील बिंदूतून त्या रेषेवर एकच लंबरेषा काढता येते.

म्हणून आपण रेषा L व रेषा M ह्या परस्परांस R बिंदूत छेदतात हे जे गृहीत धरले ते असत्य आहे.

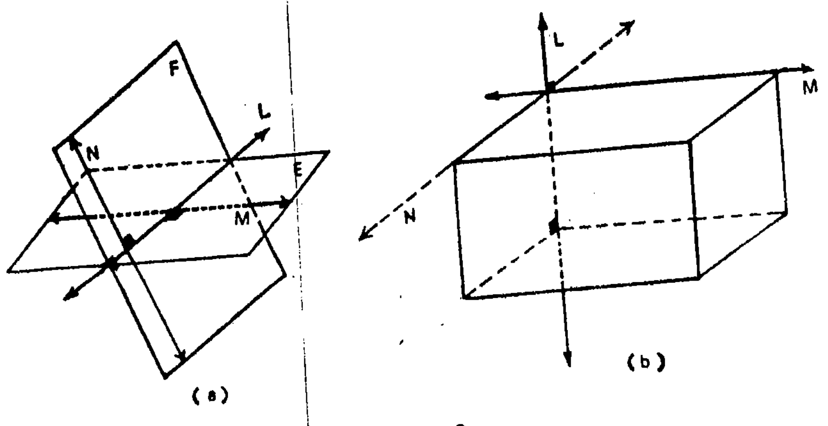
∴ त्या दोन रेषा परस्परांस छेदत नाहीत. शिवाय त्या एकाच प्रतलात आहेत.

∴ त्या समांतर आहेत.

§ 8·7 प्रमेय 8·6 वर आधारित खालील विधान पाहा.

'जर दोन रेषा एका रेषेला लंब असतील तर त्या दोन रेषा समांतर असलात.'

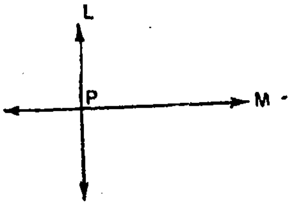
हे विधान नेहमी सत्य होईल का? केव्हा सत्य होईल? हे विधान नेहमी सत्य होण्यारकता यात कोणती कमतरता आहे?



आ. 8·9

आ. 8·9 (a) मध्ये E आणि F या प्रतलांत अनुक्रमे रेषा M व N ह्या रेषा असून त्या दोन रेषा L रेषेला लंब आहेत. मग त्या समांतर आहेत का? नसल्यास का नाहीत? तसेच आ. 8·9 (b) मध्ये L रेषेला M व N या रेषा लंब असून त्या परस्परांना समांतर आहेत का?

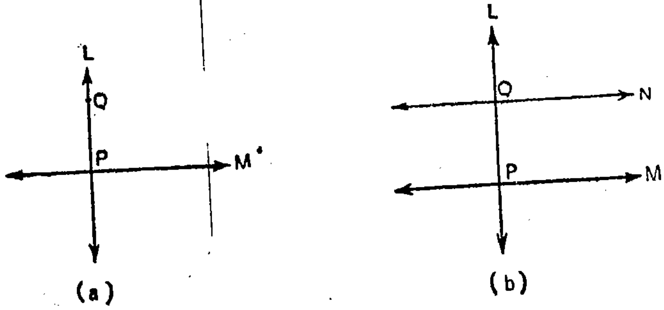
आ. 8·9 (a) मध्ये जरी M आणि N रेषा L या रेषेला लंब असल्या तरी त्या एकाच प्रतलात नाहीत म्हणून त्या समांतर होऊ शकत नाहीत. तसेच (b) मध्ये M आणि N रेषा एकाच प्रतलात असल्या तरी स्वतः L रेषा त्यांच्या प्रतलात नाही. म्हणून त्या रेषा समांतर होऊ शकत नाहीत. म्हणजेच दोन रेषा एका रेषेला लंब असणे एवढीच अट त्या दोन रेषा समांतर असण्यासाठी पुरेशी नाही. तर, त्या दोन रेषा व जिला त्या लंब आहेत ती रेषा, या तीनही रेषा एकाच प्रतलात असणे आवश्यक आहे.



आ. 8·10

§ 8·8 लंबरेषा रचनेच्या पहिल्या प्रमेयानुसार आपणास हे सांगता येते की, दिलेल्या प्रतलातील दिलेल्या रेषेवरील दिलेल्या बिंदूतून जाणारी व त्या रेषेला लंब असणारी त्या प्रतलात एक आणि एकच रेषा असते.

रेषा L वरील P बिंदूतून, तिला लंब असलेली रेषा M त्या प्रतलात काढता येते (आ. 8·10).



आ. 8·11

P खेरीज रेषा L वर आणखी एक बिंदू Q घ्या (आ. 8·11 a).

लंबरेषा रचनेच्या पहिल्या प्रमेयानुसार त्याच प्रतलात या Q बिंदूतूनही L रेषेला लंब असलेली N रेषा काढता येते (आ. 8·11 b).

रेषा M व रेषा N यांचा L रेषेशी काय संबंध राहील? हा संबंध विचारात घेऊन व नुकत्याच सिद्ध केलेल्या समांतर रेषांच्या कसोटीच्या प्रमेयाचा आधार घेऊन आपण रेषा M व रेषा N यांच्यासंबंधी कोणता निष्कर्ष काढू शकतो?

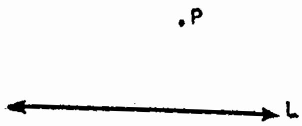
वरील चर्चेवरून, रेषा M ला समांतर असलेली व तिच्या बाहेरील बिंदूतून जाणारी एकतरी रेषा असते हे दाखवणे आता आपणास शक्य झाले आहे.

§ 8·9 ▪ प्रमेय : समांतर रेषांचे अस्तित्व

दिलेल्या रेषेला तिच्या बाहेरील बिंदूतून जाणारी कमीतकमी एक तरी समांतर रेषा काढता येते.

पक्ष : रेषा L ही दिलेली रेषा असून P हा तिच्या बाहेरील दिलेला बिंदू आहे (आ. 8·12).

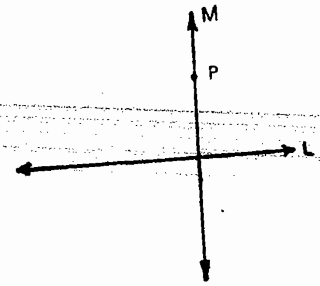
साध्य : P बिंदूतून जाणारी व रेषा L ला समांतर असणारी एक तरी रेषा असतेच.



आ. 8·12

सिद्धता :

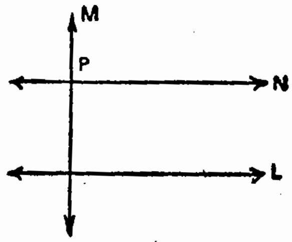
1. रेषा L ही दिलेली रेषा आहे आणि P हा तिच्या बाहेरील बिंदू आहे. ......(पक्ष)
2. P मधून रेषा L वर फक्त एकच लंबरेषा काढता येते. ...... (लंबरेषा रचनेचे दुसरे प्रमेय.)
3. समजा ही लंबरेषा M आहे (आ. 8·13). हा लंब, P बिंदू व रेषा L यांनी निश्चित केलेल्या प्रतलात असतो.



आ. 8·13

4. या प्रतलात P बिंदूतून रेषा M ला एकच लंबरेषा काढता येते.........(लंबरेषा रचनेचे पहिले प्रमेय.)
5. समजा ही लंबरेषा N आहे (आ. 8·14). आता रेषा L व रेषा N या एकाच प्रतलात आहेत. आणि त्या त्याच प्रतलातील M रेषेला लंब आहेत.
6. ∴ रेषा L ∥ रेषा N .... (समांतर रेषांच्या कसोटीचे प्रमेय.)

येथे आपण L रेषेला समांतर असलेली व P बिंदूतून जाणारी N ही एक तरी रेषा असते हे दाखवले.



आ. 8·14

§ 8·10 दिलेल्या रेषेबाहेरील बिंदूतून जाणारी व त्या रेषेला समांतर असणारी रेषा असते (समांतर रेषेचे अस्तित्व) हे आपण सिद्ध केले. साहजिकच असा प्रश्न उपस्थित होतो की, दिलेल्या रेषेला तिच्याबाहेरील दिलेल्या बिंदूतून फक्त एकच समांतर रेषा काढता येते का? की अनेक समांतर रेषा काढता येतात? समांतर रेषेचे अस्तित्व सिद्ध झाल्यावर, अशी केवळ एकच रेषा असते

(समांतर रेषेचे एकमेवत्व) हे देखील सिद्ध करण्याचा विचार यावेळी मनात येलई. पण महत्वाची गोष्ट अशी की, सध्या आपल्याजवळ असलेल्या गृहीतकांच्या व प्रमेयांच्या आधारे अशा समांतर रेषांचे एकमेवत्व आपण सिद्ध करू शकत नाही. आपणास एकमेवत्वाचे गृहीतक मांडावे लागेल. हे गृहीतकच पुढे योग्य वेळी मांडले जाईल. त्यापूर्वी समांतर रेषांच्या आणखी काही गुणधर्मांचा आपण अभ्यास करू.

§ 8·11 प्रतलनिश्चितीच्या दुसऱ्या प्रमेयात आपण पाहिले की, एकमेकींस छेदणाऱ्या दोन रेषा एक व एकच प्रतल निश्चित करतात. समांतर असलेल्या रेषा एकप्रतलीय असतात पण त्या परस्परांस छेदत नाहीत. म्हणजेच, या समांतर रेषांमधून एक प्रतल जाते. पण अशी किती प्रतले या समांतर रेषांमधून जाऊ शकतात ? ज्याप्रमाणे, एकप्रतलीय पण परस्परांस छेदणाऱ्या दोन रेषा, एकच प्रतल निश्चित करतात, त्याचप्रमाणे एकप्रतलीय पण परस्परांना न छेदणाऱ्या (म्हणजेच समांतर) रेषा देखील केवळ एकच प्रतल निश्चित करतात.

§ 8·12 ■ **प्रमेय :**

दोन समांतर रेषा फक्त एकाच प्रतलात (सामावलेल्या) असतात.

पक्ष : रेषा L व रेषा M ह्या दोन समांतर रेषा आहेत असे समजा. या रेषा एका प्रतलात आहेत हे उघड आहे. समजा हे प्रतल E आहे.

साध्य : आपणास सिद्ध करायचे आहे की या दोन समांतर रेषांना सामावणारे E हे एकच प्रतल आहे.

सिद्धता : रेषा L आणि रेषा M यांना सामावणारे E खेरीज F हे आणखी एक प्रतल आहे असे समजा.

आता M वर P हा कोणताही एक बिंदू घ्या. रेषा M ही E या प्रतलात असल्याने P हा बिंदू स्वतः E प्रतलातच असतो.

पण रेषा L ही E प्रतलात आहेच.

म्हणजे, रेषा L व P बिंदू हे दोन्ही E या प्रतलात आहेत.

याच पद्धतीने, रेषा L आणि P बिंदू हे दोन्ही F या प्रतलात आहेत.

म्हणजेच, रेषा L व तिच्या बाहेरील P बिंदू यांना सामावणारी E आणि F ही दोन भिन्न प्रतले आहेत. परंतु प्रतलनिश्चितीच्या पहिल्या प्रमेयानुसार, कोणतीही रेषा व तिच्या बाहेरील बिंदू यांना सामावणारे एकच प्रतल असते.

म्हणजे रेषा L व रेषा M यांना सामावणारे E खेरीज F हे आणखी एक प्रतल आहे हे जे आपण गृहीत धरले ते असत्य आहे.

∴ रेषा L व रेषा M या समांतर रेषांना सामावणारे एकच प्रतल असते.

§ 8·13 **प्रश्न :**

1. खालीलपैकी कोणती विधाने सत्य आहेत ते सांगा.

(i) समांतर नसलेल्या रेषा वितलीय रेषा असतात.

(ii) जर दोन रेषा समांतर नसतील तर त्या परस्परांस छेदतातच.

(iii) जर दोन रेषा परस्परांना छेदत नसतील तर त्या समांतर असल्याच पाहिजेत.
(iv) दोन एकप्रतलीय रेषा एकमेकांना छेदत नसतील तर त्या समांतर असतात.
(v) जर दोन रेषा समांतर नसतील तर त्या एकाच प्रतलात असतात.
(vi) वितलीय रेषा एका प्रतलात नसतातच असे नाही.
(vii) जर दोन रेषांपैकी प्रत्येक रेषा तिसऱ्या रेषेला लंब असेल तर त्या दोन रेषा समांतर असतातच.
(viii) दोन वितलीय रेषा परस्परांना छेदणाऱ्या दोन प्रतलांत असणे शक्य आहे.
(ix) वितलीय रेषांना सामावणारी प्रतले परस्परांना छेदत नाहीत.
(x) रेषा L व रेषा M ह्या समांतर रेषा आहेत. तर रेषा L व रेषा M ह्यांना सामावणारे एकच प्रतल असते.
(xi) किरण AB व किरण CD हे समांतर किरण आहेत. तर रेषा AB व रेषा CD या समांतर रेषा असल्याच पाहिजेत.
(xii) एकाच प्रतलातील दोन रेषा एक तर समांतर असतात अथवा एकमेकींना छेदतात.
(xiii) अवकाशातील दोन रेषा एक तर समांतर असतात अथवा एकमेकींना छेदतात.
(xiv) दोन वितलीय रेषा एका तिसऱ्या रेषेस लंब असू शकतात.

2. खालील प्रश्नांची उत्तरे दया.

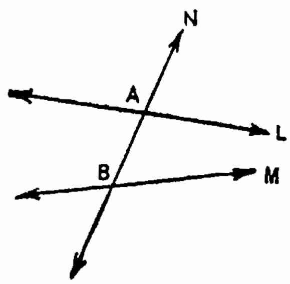
(i) परस्परांस छेदत नाहीत व समांतरही नाहीत अशा कोणत्या रेषा अवकाशात असतात?
(ii) दोन रेषा समांतर असण्यासाठी ह्या रेषांनी कोणत्या अटी पूर्ण केल्या पाहिजेत?
(iii) 'रेषेबाहेरील बिंदूतून त्या रेषेला एक तरी समांतर रेषा काढता येते' या विधानात समांतर रेषेचे एकमेवत्व सांगितले आहे की अस्तित्व?
(iv) दोन रेषांना सामावणारी किती प्रतले असतात?
(v) दोन रेषाखंड समांतर आहेत असे आपण केव्हा म्हणतो?
(vi) एका प्रतलात असलेले व परस्परांस न छेदणारे रेषाखंड समांतर असतीलच असे नाही असे आपण का म्हणतो?

§ 8·14 उजळणी :

समांतर रेषांसंबंधींचे आणखी काही गुणधर्म आपणास पाहायचे आहेत. त्यांचा अभ्यास करण्यापूर्वी आठव्या वर्गात झालेल्या समांतर रेषांच्या काही संज्ञांची उजळणी करू.

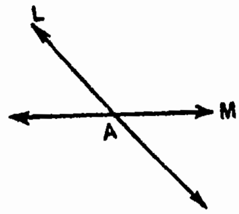
व्याख्या : छेदिका (Transversal)

एका प्रतलातील दोन रेषांना त्याच प्रतलातील तिसरी एखादी रेषा दोन भिन्न बिंदूत छेदीत असेल तर त्या रेषेला त्या दोन रेषांची **छेदिका** म्हणतात.



आ. 8·15

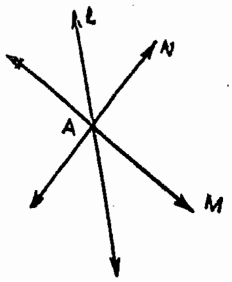
आ. 8·15 मध्ये कागदाच्या प्रतलात रेषाL व रेषाM या दोन रेषांना रेषा N ही A आणि B या भिन्न बिंदूत छेदते. म्हणून रेषाN ही रेषाL व M यांची छेदिका होय.



आ. 8·16

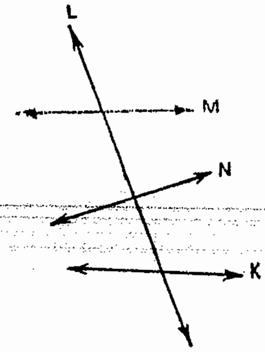
आ. 8·16 मध्ये रेषा L ही रेषा M ला छेदताना दिसते. मग L ही रेषा M ची छेदिका होईल का?

आपण केलेल्या छेदिकेच्या व्याख्येनुसार रेषा L ही दोन अथवा अधिक रेषांना छेदावयास हवी, तरच तिला छेदिका म्हणता येईल. इथे रेषाL ही एकाच रेषेला छेदते. म्हणून आपण हिला रेषा M ची 'छेदिका' म्हणणार नाही.



आ. 8·17

आता आ. 8·17 पाहा. यात रेषा L ही रेषा M व रेषा N या दोन भिन्न रेषांना छेदताना दिसते. मग इथे रेषा L ही रेषा M व रेषा N यांची छेदिका होईल का? रेषा L ही रेषा M ला A बिंदूत छेदते. त्या रेषेने पुन्हा रेषा N ला A खेरीज इतर कोणत्याही बिंदूत छेदले असते तर L ही रेषा M व रेषा N यांची छेदिका झाली असती. पण ती रेषा N ला A बिंदूतच छेदते. म्हणजे रेषा L ही रेषा M व रेषा N यांना दोन भिन्न बिंदूत छेदत नसल्याने तिला आपण 'छेदिका' म्हणणार नाही.

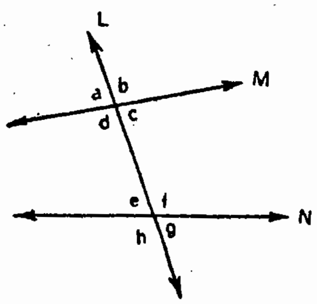


आ. 8·18

आ. 8·18 मध्ये रेषा L ही रेषा M, रेषा N व रेषा K यांची छेदिका आहे (8·18) असे आपण निश्चितपणे का सांगू शकतो?

'छेदणारी रेषा' व 'छेदिका' यांमधील फरक आता तुमच्या लक्षात आलाच असेल. कोणतीही रेषा छेदिका असण्यासाठी तिने दोन (अथवा अधिक) रेषांना भिन्न बिंदूत छेदले पाहिजे.

आ. 8·19 मध्ये रेषा L ही रेषा M व रेषा N यांची छेदिका आहे. या छेदिकेमुळे $\angle a$, $\angle b$, $\angle c$, $\angle d$, $\angle e$, $\angle f$, $\angle g$, $\angle h$ असे एकूण आठ कोन होतात. या कोनांच्या विशिष्ट जोडया विशिष्ट नावाने ओळखल्या जातात हे तुम्हांस माहीत आहे.



आ. 8·19

$\angle a$ व $\angle c$ यांना कोणते कोन म्हणतात?

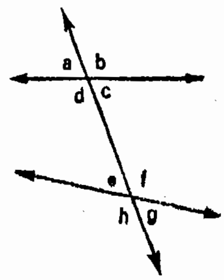
$\angle b$ व $\angle f$ या कोनांच्या जोडीला कोणते नाव आहे?

$\angle d$ व $\angle e$ हे कोणते कोन आहेत?

वर विचारलेल्या कोनांच्या जोडयांची नावे तुम्ही आठव्या इयत्तेत शिकला आहात.

या कोनांच्या निरनिराळया जोडयांच्या प्रकारांची थोडक्यात उजळणी करू.

(a) आंतर कोन (Interior Angles) :



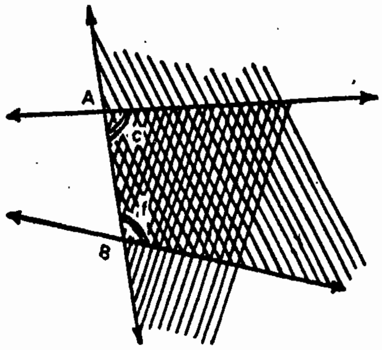
आ. 8·20

आ. 8·20 मध्ये दाखवलेली $\angle d$ व $\angle e$ ही कोनांची जोडी पाहा. यांना आंतर कोन म्हणतात. $\angle c$ व $\angle f$ ही आंतर कोनांची दुसरी जोडी होईल.

आंतर कोनांची आणखी एक जोडी तुम्हांला शोधता येते का?

आंतर कोनांचा एक महत्त्वाचा गुणधर्म आ. 8·21 वरून तुमच्या लक्षात येईल.

$\angle c$ व $\angle f$ हे जर आंतर कोन असतील तर त्या कोनांचा छेद हा, त्या रेषा समांतर असल्यास एक रेखाखड (येथे रेख AB) आणि रेषा समांतर नसल्यास रेषाखंड, किंवा रेषाखंड आणि एक बिंदू असतो, आणि त्या कोनांचे अंतर्भाग परस्परांना छेदतात (आ. 8·21).



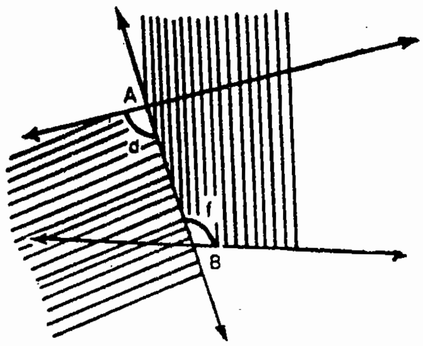
आ. 8·21

(b) **आंतर व्युत्क्रम कोन**
(Alternate Interior Angles):

आकृती 8·20 मधील $\angle d$ व $\angle f$ ही कोनांची जोडी पाहा. या कोनांना आंतर व्युत्क्रम कोन म्हणतात. $\angle c$ व $\angle e$ ही आंतर व्युत्क्रम कोनांची दुसरी जोडी आहे. आंतर व्युत्क्रम कोनांच्या अशा किती जोडया दाखवता येतात ? आंतर व्युत्क्रम कोनांचा कोणता महत्त्वाचा गुणधर्म तुमच्या लक्षात येतो ?

आ. 8·22 मध्ये हा गुणधर्म स्पष्ट केला आहे.

$\angle d$ व $\angle f$ हे जर आंतर व्युत्क्रम कोन असतील तर त्या कोनांचा छेद हा, त्या रेषा समांतर असल्यास एक रेषाखंड (येथे रेख AB) आणि त्या रेषा समांतर नसल्यास रेषाखंड असतो आणि त्या कोनांचे अंतर्भाग परस्परांस छेदत नाहीत.



आ. 8·22

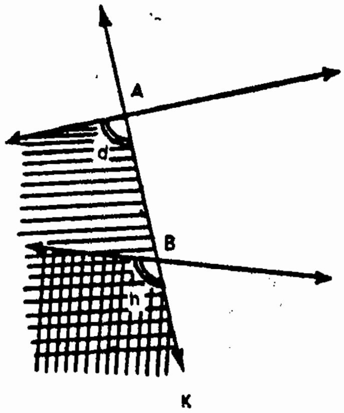
या पुढे 'आंतर व्युत्क्रम कोन' यांचा आपण नुसते 'व्युत्क्रम कोन' म्हणूनच उल्लेख करणार आहोत.

(c) **संगत कोन** (Corresponding Angles) :

आ. 8.20 मधील $\angle a$ व $\angle e$ या कोनांच्या जोडीचे निरीक्षण करा. या कोनांना संगत कोन म्हणतात. संगत कोनांचे वर्णन खालीलप्रमाणे करता येईल.

जर दोन रेषांना एक छेदिका छेदत असेल आणि जर $\angle c$ व $\angle e$ हे व्युत्क्रम कोन असतील व जर $\angle c$ व $\angle a$ हे विरुद्ध कोन असतील तर $\angle e$ व $\angle a$ हे संगत कोन असतात. आकृतीत संगत कोनांची दुसरी जोडी $\angle c$ व $\angle g$ ही आहे. संगत कोनांच्या एकूण किती जोडया दाखवता येतील ? $\angle d$चा संगत कोन कोणता ? $\angle a$ व $\angle h$ हे संगत कोन आहेत का ?

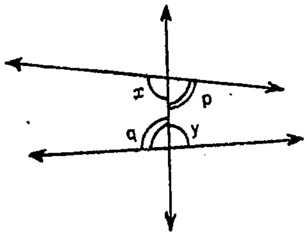
आ. 8·23 वरून हे स्पष्ट होईल की जर $\angle d$ व $\angle h$ हे संगत कोन असतील तर त्यांचा छेद हा त्या रेषा समांतर असल्यास एक किरण असतो. (येथे किरण BK) व त्या रेषा समांतर नसल्यास किरण, किंवा किरण व एक बिंदू असतो. तसेच त्या कोनांचे अंतर्भाग परस्परांस छेदतात.



आ. 8·23

वर सांगितलेले कोनांचे प्रकार हे समांतर रेषांचे गुणधर्म शिकण्याच्या दृष्टीने महत्त्वाचे आहेत. हे गुणधर्म शिकताना व त्यांची सिद्धता देताना कोनांच्या वरील प्रकारांचा आधार घेतला जाईल. उदाहरणार्थ, एखादया सिद्धतेत $\angle c$ व $\angle e$ या कोनांच्या जोडीचा उल्लेख आल्यास ही जोडी व्युत्क्रम कोनांची आहे असे सरळ सांगितले जाईल. त्यावरून ते कोन कशा प्रकारचे आहेत व त्यांचे गुणधर्म काय आहेत हे आपल्याला समजले पाहिजे.

§ 8·15 दोन रेषांच्या छेदिकेमुळे झालेल्या कोनांच्या गुणधर्मांवरून समांतर रेषांसंबंधींचे अनेक गुणधर्म पडताळून पाहता येतात.



आ. 8·24

आ. 8·24 पाहा. यात व्युत्क्रम कोनांच्या दोन जोडया दाखवल्या आहेत. $\angle x$ आणि $\angle y$ व $\angle p$ आणि $\angle q$ या त्या दोन जोडया होत. हया दोन जोडयांचा परस्परांशी काय संबंध असेल? जर $\angle x \cong \angle y$ असेल तर $\angle p$ व $\angle q$ यांच्या एकरूपतेसंबंधी काय सांगता येईल?

ही दुसरी जोडीदेखील एकरूप राहील का? असल्यास, ती एकरूप असण्याचे काय कारण असेल?

$\angle x$ व $\angle p$ तसेच $\angle y$ व $\angle q$ यांच्यामध्ये कोणता संबंध आहे? या संबंधाला अनुसरून $\angle x$ आणि $\angle y$ एकरूप असतील तर $\angle p$ व $\angle q$ यांच्यामध्ये कोणता संबंध आढळतो?

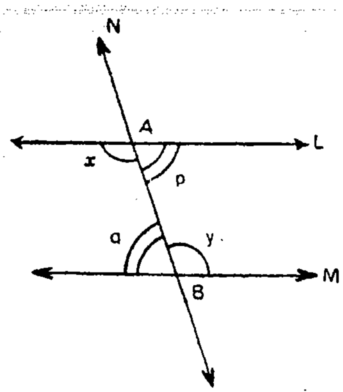
वरील प्रश्नांची उत्तरे खालील विधानात व त्याच्या सिद्धतेत सापडतील.

सिद्धतेत काही ठिकाणी रिकाम्या जागा सोडल्या आहेत. त्या जागी योग्य शब्द भरून तुम्ही सिद्धता पूर्ण करायची आहे.

§ 8·16 ▪ **प्रमेय : व्युत्क्रम कोनांची एकरूपता**

दोन रेषांना एका छेदिकेने छेदले असता व्युत्क्रम कोनांची एक जोडी एकरूप असेल तर व्युत्क्रम कोनांची दुसरीही जोडी एकरूप असते.

पक्ष : आकृती 8·25 मध्ये रेषा L व रेषा M यांची ______ रेषा ही छेदिका आहे. हया छेदिकेमुळे $\angle x$ व $\angle$ ______ आणि $\angle$ ______ व $\angle d$ हया व्युत्क्रम कोनांच्या जोडया होतात, आणि त्यांपैकी $\angle x \cong \angle y$.



आ. 8·25

साध्य : $\angle p \cong$ ______

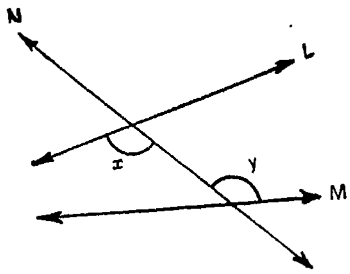
सिद्धता :

1. $\angle x \cong$ ______ ......(पक्ष)
2. $\angle x$ व $\angle p$ ही कोनांची ______ जोडी आहे.
3. $\therefore m\angle x + m\angle p =$ ______ ......(______)
4. तसेच $m\angle q + m\angle$ ______ $=$ ______
5. $\therefore m\angle x + m\angle$ ______ $= m\angle$ ______ $+ m\angle y$
6. परंतु $m\angle$ ______ $= m\angle$ ______ ....(पक्ष)
7. $\therefore m\angle$ ______ $= m\angle q$
8. $\therefore \angle$ ______ $\cong \angle$ ______

हेच आपणास सिद्ध करायचे होते.

§ 8·17 व्युत्क्रम कोनांच्या एकरूपतेच्या गुणधर्मांचा उपयोग आपणास रेषांच्या समांतरतेसंबंधी माहिती मिळवण्यासाठी करता येतो.

आकृती 8·26 मध्ये $\angle x$ व $\angle y$ हे व्युत्क्रम कोन आहेत. आता $\angle x$ व $\angle y$ हे एकरूप असतील तर रेषा L व रेषा M यांच्या-संबंधी काय सांगता येते ? व्युत्क्रम कोनांच्या एकरूपतेने दोन रेषांच्या समांतरतेविषयी जो महत्त्वाचा निष्कर्ष निघतो तो पुढील प्रमेयात मांडला आहे.



आ. 8·26

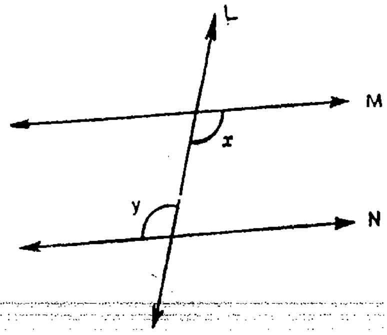
§ 8·18 ▪ **प्रमेय : समांतर रेषांची व्युत्क्रम कोन कसोटी**

एका प्रतलातील दोन रेषांना छेदिकेने छेदले असता होणाऱ्या व्युत्क्रम कोनांची एक जोडी जर एकरूप असेल तर त्या दोन रेषा समांतर असतात.

पक्ष : रेषा M व रेषा N या एकाच प्रतलात असून रेषा L ही त्यांची छेदिका आहे. तसेच $\angle x \cong \angle y$ (आ. 8·27)

साध्य : रेषा M $\parallel$ रेषा N

सिद्धता : रेषा M व रेषा N या एकाच प्रतलात असल्याने त्यांच्याबाबतीत दोनच पर्याय संभवतात.



आ. 8·27

(i) रेषा M व रेषा N समांतर नाहीत.

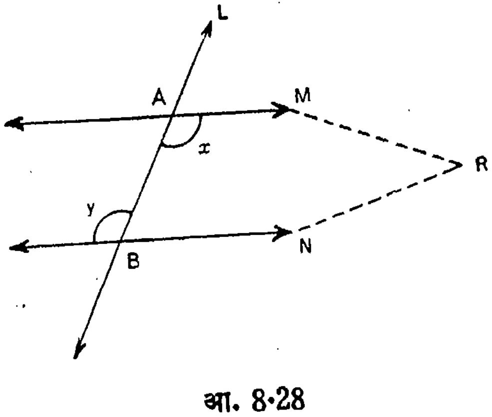
(ii) रेषा M व रेषा N समांतर आहेत.

आता आपण पहिल्या पर्यायाचा विचार करू. म्हणजे रेषा M व रेषा N ह्या समांतर नाहीत असे समजू.

हे गृहीत धरलेले विधान असत्य आहे असे दाखवले की आपल्याला जे सिद्ध करायचे आहे ते सिद्ध होईल.

जर त्या रेषा समांतर नसतील तर त्या परस्परांना छेदतीलच. (का ?) समजा त्या परस्परांना R बिंदूत छेदतात. (आ. 8·28)

A, B, R हे तीन बिंदू एका रेषेत नसल्याने $\triangle$ ABR तयार झाला. या त्रिकोणाचा $\angle y$ हा बाह्यकोन असून $\angle x$ हा त्याच्याशी असंलग्न असा आंतर कोन आहे. त्रिकोणाच्या बाह्यकोनाच्या प्रमेया-नुसार, त्रिकोणाचा बाह्यकोन हा त्याच्याशी असंलग्न असलेल्या आंतर कोनापेक्षा मोठा असतो.



आ. 8·28

$\therefore m\angle y > m\angle x$

परंतु पक्षामध्ये $m\angle y = m\angle x$ दिलेले आहे. म्हणजेच, रेषा M व रेषा N ह्या रेषा परस्परांस छेदतात हे जे आपण गृहीत धरले ते असत्य आहे.

∴ रेषा M व रेषा N परस्परांना छेदत नाहीत.

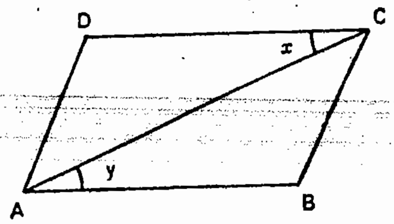
∴ रेषा M ∥ रेषा N.

हेच आपणास सिद्ध करावयाचे होते.

आ. 8·28 मध्ये छेदनबिंदू R हा छेदिकेच्या उजव्या अंगास दाखवला आहे. तो बिंदू छेदिकेच्या डाव्या अंगास असण्याची शक्यता विचारात घेतल्यासही वरीलप्रमाणे सिद्ध करता येते.

व्युत्क्रम कोनांच्या एकरूपतेवरून रेषांच्या समांतरतेसंबंधी खात्री देणारे हे प्रमेय महत्वाचे व उपयुक्त आहे. कोणत्याही प्रमेयाच्या सिद्धतेमध्ये, दोन व्युत्क्रम कोन एकरूप आहेत असे आढळून आल्यास संबंधित दोन रेषा समांतर आहेत असे आपणास वरील प्रमेयाच्या आधारे ताबडतोब सांगता येईल.

या प्रमेयावर आधारलेल्या खालील उदाहरणाचा नीट अभ्यास करा; म्हणजे या प्रमेयात सांगितलेला गुणधर्म लक्षात येईल.



आ. 8·29

पक्ष : ABCD ही प्रतलीय आकृती असून
रेख DC ≅ रेख AB
रेख AD ≅ रेख BC.

साध्य : रेख AB ∥ रेख DC.

सिद्धता : △ ADC व △ CBA यांची एकास एक संगती विचारात घ्या.

रेख DC ≅ रेख AB
रेख AD ≅ रेख BC ......पक्ष.
रेख AC ≅ रेख CA
∴ △ ADC ≅ △ CBA ......बाबाबा गृहीतक
∴ $\angle x \cong \angle y$ ......एकरूप त्रिकोणांचे संगत कोन.

परंतु हे कोन रेषा DC व रेषा AB यांच्याशी, छेदिका AC हिने केलेले व्युत्क्रम कोन आहेत.

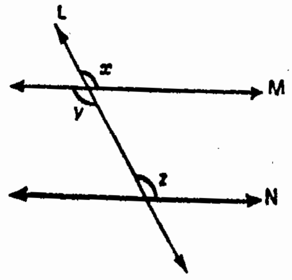
∴ रेषा AB ∥ रेषा DC ...समांतर रेषांची व्युत्क्रम कोन कसोटी
∴ रेख AB ∥ रेख DC

हेच आपणास सिद्ध करायचे होते.

§ **8·19 :** समांतर रेषांच्या व्युत्क्रम कोन कसोटीच्या प्रमेयावर आधारित तीन उपप्रमेये पुढे दिली आहेत. त्यांपैकी पहिले उपप्रमेय संगत कोनांच्या एका जोडीच्या एकरूपतेचा व्युत्क्रम कोनांच्या जोडीच्या एकरूपतेशी संबंध सांगते. तर, इतर दोन उपप्रमेये अनुक्रमे संगत कोनांचा व आंतर कोनांचा संबंधित रेषांच्या समांतरतेशी संबंध स्पष्ट करतात.

§ 8·20 उपप्रमेय 1 :

एका प्रतलातील दोन रेषांना एका छेदिकेने छेदले असता होणाऱ्या संगत कोनांची एक जोडी एकरूप असेल तर त्यांच्या व्युत्क्रम कोनांची जोडी एकरूप असते.



आ. 8·30

आ. 8·30 मध्ये, $\angle x \cong \angle z$ दिले असून

$\angle y \cong \angle z$ हे सिद्ध करायचे आहे.

विरुद्ध कोनांच्या एकरूपतेच्या प्रमेयाचा आधार घेऊन या उपप्रमेयाची सिद्धता लिहा.

§ 8·21 उपप्रमेय 2 : **समांतर रेषांची संगत कोन कसोटी**

एका प्रतलातील दोन रेषांना छेदिकेने छेदले असता होणाऱ्या संगत कोनांची एक जोडी एकरूप असेल तर त्या दोन रेषा समांतर असतात.

संगत कोनांची एक जोडी जर एकरूप असेल तर व्युत्क्रम कोनांची एक जोडी एकरूप असते. हे उपप्रमेय 1 वरून सांगता येते. आणि व्युत्क्रम कोनांची जोडी एकरूप असेल तर त्या रेषा समांतर असतात, हे समांतर रेषांच्या व्युत्क्रम कोन कसोटीच्या प्रमेयावरून सांगता येते. पर्यायाने, संगत कोनांची एक जोडी एकरूप असेल तर या दोन रेषा समांतर असतात हे सिद्ध होते.

योग्य आकृती काढून वरील चर्चेच्या अनुरोधाने सिद्धता लिहा. समांतर रेषांच्या व्युत्क्रम कोन कसोटीच्या प्रमेयाप्रमाणेच या उपप्रमेयाची अप्रत्यक्ष सिद्धता स्वतंत्रपणे देता येते. ती स्वतः लिहून काढा.

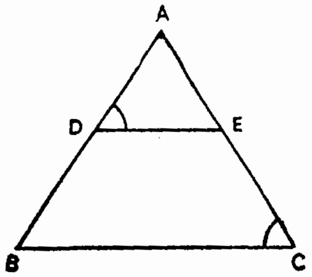
या उपप्रमेयावर आधारलेले खालील उदाहरण पाहा. त्यात या उपप्रमेयातील गुणधर्माचा कसा उपयोग केला आहे ते लक्षात घ्या.

पक्ष : आ. 8·31 मध्ये, $\triangle$ ABC या समद्विभुज त्रिकोणात

रेख AB $\cong$ रेख AC

$\angle$ ADE $\cong$ $\angle$ ACB

साध्य : रेख DE $\parallel$ रेख BC



आ. 8·31

सिद्धता :

रेख AB $\cong$ रेख AC ....पक्ष

$\angle$ ABC $\cong$ $\angle$ ACB ....समद्विभुज $\triangle$ च्या पायाजवळील कोन

परंतु, $\angle$ ACB $\cong$ $\angle$ ADE ....पक्ष

$\therefore$ $\angle$ ABC $\cong$ $\angle$ ADE

परंतु हे संगत कोन आहेत आणि ते एकरूप आहेत.

$\therefore$ रेषा DE $\parallel$ रेषा BC ....समांतर रेषांची संगत कोन कसोटी.

$\therefore$ रेख DE $\parallel$ रेख BC

हेच आपणास सिद्ध करायचे होते.

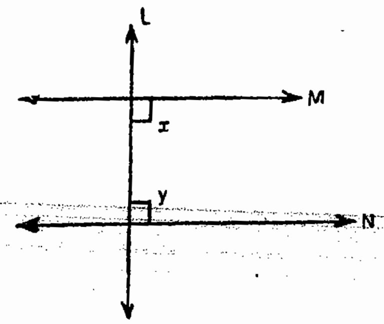
§ 8·22 उपप्रमेय 3 : समांतर रेषांची आंतर कोन कसोटी

एका प्रतलातील दोन रेषांना एका छेदिकेने छेदले असता आंतर कोनांच्या एका जोडीतील कोन परस्परांस पूरक असतील तर त्या दोन रेषा समांतर असतात.

या उपप्रमेयाची सिद्धता पाहण्यापूर्वी त्या उपप्रमेयात स्पष्ट केलेल्या गुणधर्माचा कसा उपयोग केला जातो हे उदाहरणाद्वारे प्रथम समजावून घेऊ.

उदाहरण : एका प्रतलातील दोन रेषा त्या प्रतलातील एकाच रेषेला प्रत्येकी लंब असतील तर त्या दोन रेषा परस्परांना समांतर असतात, हे सिद्ध करा.

हे § 8·6 मधील समांतर रेषेच्या कसोटीचे प्रमेय आहे हे तुमच्या, लक्षात आलेच असेल. या प्रमेयाची सिद्धता तुम्ही पूर्वी अभ्यासली आहे. आता हेच प्रमेय समांतर रेषांच्या आंतर कोन कसोटीच्या प्रमेयाच्या आधारे कसे सिद्ध करता येते ते पाहू. यावरून एकच विधान विविधरीत्या सिद्ध करता येते हेही तुमच्या लक्षात येईल.



आ. 8·32

पक्ष : आकृती 3·32 मध्ये रेषा M $\perp$ रेषा L व रेषा N $\perp$ रेषा L

साध्य : रेषा M $\parallel$ रेषा N

सिद्धता : रेषा M $\perp$ रेषा L ...पक्ष

$\therefore m\angle x = 90$

तसेच रेषा N $\perp$ रेषा L

$\therefore m\angle y = 90$

$\therefore m\angle x + m\angle y = 90 + 90 = 180$

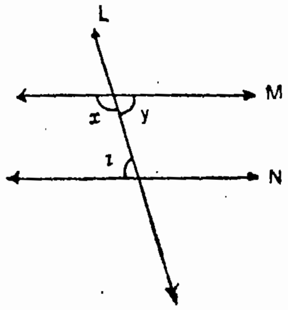
$\therefore \angle x$ व $\angle y$ हे पूरक कोन झाले.

परंतु हे आंतर कोन आहेत.

$\therefore$ रेषा M $\parallel$ रेषा N ....समांतर रेषांची आंतर कोन कसोटी.

हेच आपणास सिद्ध करायचे होते.

आता वरील उपप्रमेयाची सिद्धता पाहू. सिद्धतेमधील रिकाम्या जागी योग्य शब्द भरून सिद्धता तुम्ही पूर्ण करायची आहे.



आ. 8·33

पक्ष : आकृती 8·33 मध्ये रेषा L ही रेषा M व रेषा N यांची छेदिका असून ह्या तीनही रेषा एकाच प्रतलात आहेत. तसेच,

$$m\angle x + m\angle z = 180$$

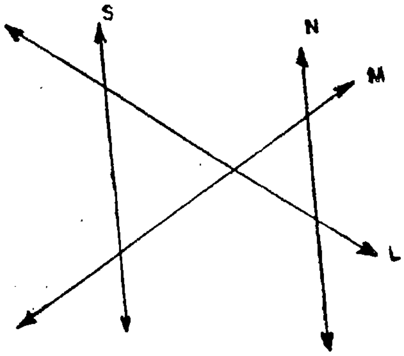
साध्य : रेषा M $\parallel$ रेषा N.

सिद्धता :

1. $m\angle x + m\angle$ —— $= 180$ ...पक्ष.
2. $m\angle x + m\angle y =$ —— ... ——
3. $\therefore m\angle x + m\angle y = m\angle x + m\angle$ —— ...विधान 1 व 2.
4. $\therefore m\angle$ —— $= m\angle y$
5. परंतु हे —— कोन आहेत.
6. $\therefore$ रेषा M $\parallel$ रेषा N ...समांतर रेषांची कोन कसोटी.

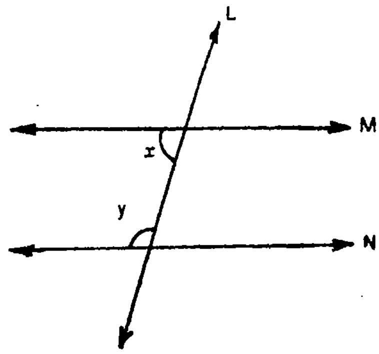
§ 8·23 प्रश्न :

1. आ. 8·34 मध्ये, कागदाच्या प्रतलात रेषा L, रेषा M, रेषा N व रेषा S या चार रेषा असून रेषा S $\parallel$ रेषा N आहे. रेषा M व रेषा L पैकी कोणतीही रेषा, रेषा S ला समांतर नाही. तर खालीलपैकी कोणती विधाने सत्य आहेत ?
   (a) रेषा L ही रेषा N व रेषा S ची छेदिका आहे.
   (b) रेषा L ही रेषा S, रेषा M व रेषा N ची छेदिका आहे.
   (c) रेषा S ही रेषा M, रेषा N व रेषा L ची छेदिका आहे.
   (d) रेषा M ही रेषा L ची छेदिका आहे.
   (e) रेषा N ही रेषा M आणि रेषा L ची छेदिका आहे.



आ. 8·34

2. आ. 8·35 मध्ये $m\angle y = 109$ आणि $m\angle x = 69$ असेल तर 'रेषा M $\parallel$ रेषा N' हे विधान सत्य आहे की असत्य ते कारणांसहित सांगा.

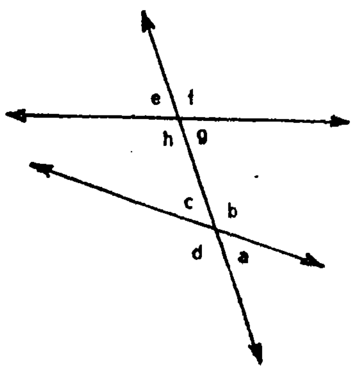


आ. 8·35

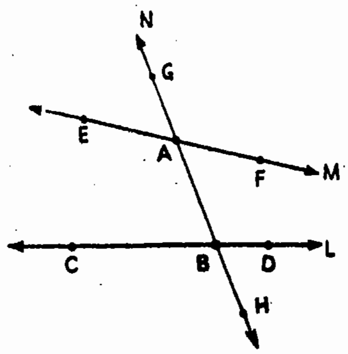
3. आ. 8·36 मधील प्रतलीय आकृतीत

$\angle e$ व $\angle c$ हे —— कोन आहेत.
$\angle c$ व $\angle g$ हे —— कोन आहेत.
$\angle g$ व $\angle b$ हे —— कोन आहेत.
$\angle c$ व $\angle a$ हे —— कोन आहेत.
$\angle e \cong \angle c$ दिलेले असेल आणि $m\angle e = 72$ असेल तर,

$m\angle a =$ —— $m\angle g =$ ——
$m\angle f =$ —— $m\angle d =$ ——



आ. 8·36



आ. 8·37

4. आ. 8·37 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे रेषा L व रेषा M यांची रेषा N ही छेदिका आहे.
A, B, C, D, E, F, G, H हे या रेषांवरील बिंदू आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे आहेत.

(a) $\angle$HBD चा संगत कोन कोणता ?

(b) $\angle$FAB चा व्युत्क्रम कोन कोणता ?

(c) छेदिकेच्या एकाच अंगास $\angle$EAB चा जोडीचा आंतर कोन कोणता ?

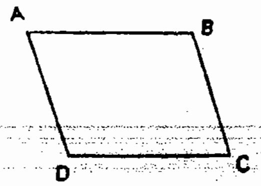
(d) रेषा L व रेषा M समांतर होण्यासाठी

(i) $\angle$EAB कोणत्या कोनाशी एकरूप व्हावयास हवा ?

(ii) $\angle$GAF कोणत्या कोनाशी एकरूप व्हावयास हवा ?

(iii) कोणते दोन कोन पूरक असावयास हवेत ?

(e) रेषा L $\parallel$ रेषा M असण्याकरता $\angle$EAG व $\angle$CBH हे ______ (पूरक / एकरूप) असले पाहिजेत.



आ. 8·38

5. आकृती 8·38 मध्ये चौकोन ABCD असून
$m\angle A = m\angle C = 55$. $m\angle B = m\angle D = 125$ तर,

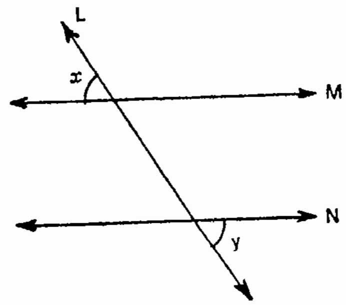
(i) रेख AB व रेख DC या समांतर आहेत काय ?

(ii) रेख AD व रेख BC या समांतर आहेत काय ?

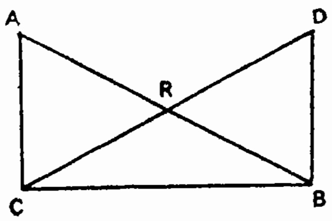
(iii) रेख AD व रेख AB या समांतर आहेत काय ?

6. **पक्ष :** आ. 8·39 मध्ये $\angle x \cong \angle y$

साध्य : रेषा M $\parallel$ रेषा N



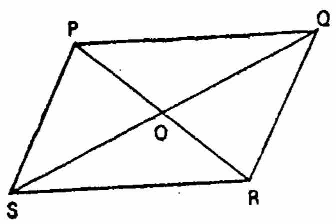
आ. 8·39



आ. 8·40

7. **पक्ष :** आ. 8·40 मध्ये रेख CR $\cong$ रेख RD आणि R हा रेख AB चा मध्यबिंदू आहे.

साध्य : रेख AC $\parallel$ रेख DB.



आ. 8·41

8. **पक्ष :** आ. 8·41 मध्ये
रेख PR व रेख SQ एकमेकींस O बिंदूत दुभागतात.

साध्य : रेख PS $\parallel$ रेख QR
रेख PQ $\parallel$ रेख SR

9. **पक्ष** : चौकोन ABCD मध्ये

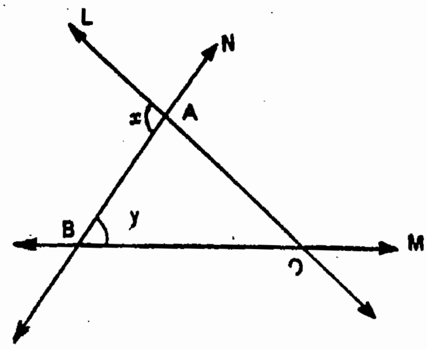
रेख AB ≅ रेख CD आणि रेख AD ≅ रेख BC

साध्य : रेख AB ∥ रेख CD आणि रेख AD ∥ रेख BC

10. **पक्ष** : आ. 8·42 मध्ये

रेषा M व रेषा N परस्परांना B मध्ये छेदतात. त्यांची छेदिका रेषा L आहे.

साध्य : $\angle x$ आणि $\angle y$ हे एकरूप नाहीत.



आ. 8·42

11. **पक्ष** : आ. 8·43 मध्ये

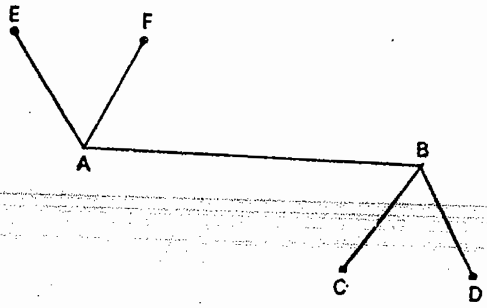
∠EAB ≅ ∠DBA

रेखAF हा ∠EAB दुभागतो.

तसेच

रेख BC हा ∠ABC दुभागतो.

साध्य : रेखAF ∥ रेख BC.



आ. 8·43

12. चौकोनाचे समोरासमोरील कोन एकरूप असतील तर तो समांतरभुज चौकोन असतो हे सिद्ध करा.

§ 8·24 दोन रेषांच्या समांतरतेची कसोटी दाखवणारे रेषांचे व छेदिकेने त्यांच्याशी केलेल्या कोनांचे काही गुणधर्म आपण आतापर्यंत पाहिले.

दिलेल्या रेषेला तिच्याबाहेरील बिंदूतून एकतरी समांतर रेषा काढता येते हे आपण सिद्ध केले. आता प्रश्न असा उपस्थित होतो की, दिलेल्या रेषेला तिच्या बाहेरील बिंदूतून एकापेक्षा जास्त समांतर रेषा काढता येतात का ?

आपण याच प्रकरणात सिद्ध केलेल्या समांतर रेषांच्या व्युत्क्रम कोन कसोटीच्या प्रमेयाचे विधान पुन्हा खाली दिले आहे.

'एका प्रतलातील दोन रेषांना एका छेदिकेने छेदले असता होणाऱ्या व्युत्क्रम कोनांची एक जोडी एकरूप असेल तर त्या दोन रेषा समांतर असतात.'

या प्रमेयाचा व्यत्यास मांडायचा झाल्यास तो खालीलप्रमाणे मांडता येईल.

'दोन समांतर रेषांना एका छेदिकेने छेदले असता होणाऱ्या व्युत्क्रम कोनांची जोडी एकरूप असते.'

हा व्यत्यास सिद्ध करायचा असेल तर आपल्याजवळ असलेली प्रमेयांची व गृहीतकांची सामग्री अपुरी आहे. याच सिद्धतेसाठी समांतर रेषांच्या अस्तित्वासंबंधीच्या प्रमेयाच्या जोडीला दिलेल्या रेषेला तिच्या बाहेरील बिंदूतून फक्त एकच समांतर रेषा काढता येते असे मानणे आवश्यक आहे. म्हणून खालील विधान आपण गृहीतक म्हणून मानणार आहोत.

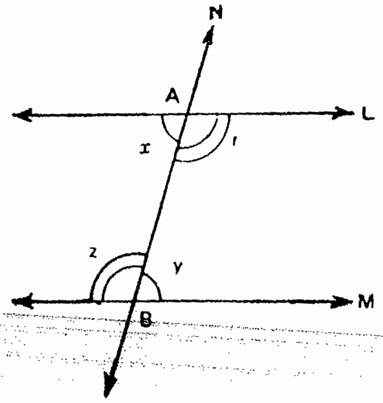
गृहीतक 17 : समांतर रेषा एकमेवता

दिलेल्या रेषेला तिच्या बाहेरील बिंदूतून फक्त एकच समांतर रेषा काढता येते.

समांतर रेषेच्या अस्तित्वाच्या प्रमेयानुसार, दिलेल्या रेषेला तिच्या बाहेरील बिंदूतून एक तरी समांतर रेषा काढता येते हे आपण सिद्ध केले, आणि अशी एकच समांतर रेषा काढता येते हे आपण वरील गृहीतकानुसार मान्य केले. त्यामुळे समांतर रेषांच्या व्युत्क्रम कोन कसोटीच्या प्रमेयाचा व्यत्यास सिद्ध करणे आता शक्य होईल.

§ 8·25 ▪ **प्रमेय :**

व्यत्यास : दोन समांतर रेषांना एका छेदिकेने छेदले असता होणारे व्युत्क्रम कोन एकरूप असतात.



आ. 8·44

पक्ष : आकृती 8·44 मध्ये, रेषा L ∥ रेषा M असून त्यांची छेदिका रेषा N ही त्यांना अनुक्रमे A व B बिंदूत छेदते.

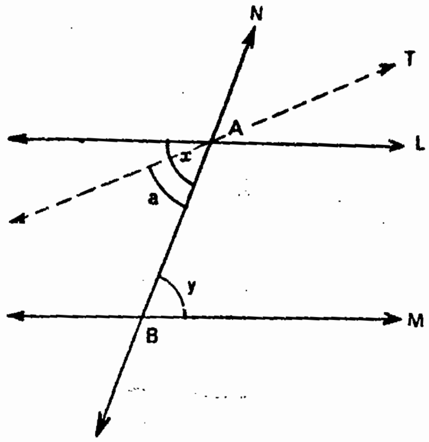
साध्य : $\angle x \cong \angle y$ आणि
$\angle r \cong \angle z$

सिद्धता : $\angle x$ व $\angle y$ या व्युत्क्रम कोनांबद्दल दोनच पर्याय संभवतात.

(i) $\angle x$ व $\angle y$ एकरूप आहेत.

(ii) $\angle x$ व $\angle y$ एकरूप नाहीत.

आपण प्रथम दुसऱ्या पर्यायाचा विचार करू. $\angle x$ व $\angle y$ हे एकरूप नाहीत असे समजा.



आ. 8·45

1. रेषा N मधील A बिंदूतून $\angle y \cong \angle a$ होईल अशी $\angle x$ च्या अंगाला रेषा L खेरीज रेषा T काढता येते. कोनरचना गृहीतकानुसार अशी एक व एकच रेषा असते.
2. परंतु व्युत्क्रम कोनांच्या गुणधर्मावरून $\angle y$ व $\angle a$ हे व्युत्क्रम कोन आहेत.
3. म्हणून समांतर रेषांच्या व्युत्क्रम कोन कसोटीच्या प्रमेयानुसार रेषा T ∥ रेषा M होईल.
4. परंतु पक्षामध्ये रेषा L ∥ रेषा M दिले आहे.
5. म्हणजे (3) आणि (4) वरून असे दिसते की M रेषेला A बिंदूतून रेषा L व रेषा T या दोन समांतर रेषा काढता येतात.

6. पण हे समांतर रेषेच्या एकमेवता गृहीतकाशी विसंगत आहे. कारण त्या गृहीतकानुसार रेषा M ला तिच्या बाहेरील A बिंदूतून फक्त एकच समांतर रेषा काढता येते.

7. म्हणून $\angle x$ व $\angle y$ हे एकरूप नाहीत, हे जे आपण गृहीत धरले ते असत्य आहे. म्हणजेच $\angle x \cong \angle y$ असले पाहिजेत.

8. आता व्युत्क्रम कोनांच्या एकरूपतेच्या प्रमेयानुसार व्युत्क्रम कोनांची एक जोडी एकरूप असेल तर त्यांची दुसरी जोडीही एकरूप असते. $\therefore \angle r \cong \angle z$

(7) आणि (8) वरून

$\angle x \cong \angle y$ आणि

$\angle r \cong \angle z$ हे सिद्ध झाले.

§ 8·26 समांतर रेषेच्या एकमेवतेसंबंधीचे विधान गृहीतक म्हणून मानावे हे युक्लिडने सुचविले. या गृहीतकामुळे भूमितीमधील अनेक गुणधर्मांचा अभ्यास करणे सोयीचे झाले आहे.

रशियाचा निकोलाय लोबॅशेव्हस्की व जर्मनीचा रीमान या दोघांनी समांतर रेषेसंबंधी वेगवेगळी गृहीतके सुचवली.

लोबॅशेव्हस्कीच्या गृहीतकानुसार दिलेल्या रेषेला तिच्याबाहेरील बिंदूतून कमीत कमी दोन समांतर रेषा काढता येतात; तर रीमानच्या गृहीतकानुसार, दिलेल्या रेषेला तिच्या बाहेरील बिंदूतून एकही समांतर रेषा काढता येत नाही.

वेगवेगळी गृहीतके घेतल्याने मिळणारे निष्कर्ष अर्थातच वेगवेगळे राहतील. उदाहरणार्थ, युक्लिडच्या भूमितीतील चौरसाकृती आपल्या परिचयाची आहे. लोबॅशेव्हस्की किंवा रीमान यांच्या भूमितीत अशा प्रकारची चौरसाकृती अस्तित्वात नाही. तसेच, त्रिकोणाच्या तीन कोनांच्या मापांची बेरीज 180 असते हे आपणास माहीत आहे. (याची सिद्धता पुढे येईलच). पण लोबॅशेव्हस्कीच्या भूमितीत ती 180 पेक्षा कमी असते तर रीमानच्या भूमितीत ती 180 पेक्षा जास्त असते. मिळणाऱ्या निष्कर्षांतील हा वेगळेपणा समांतर रेषेच्या गृहीतकाच्या वेगळेपणामुळे आला आहे हे लक्षात आलेच असेल.

या पुस्तकात आपण फक्त युक्लिडचे समांतर रेषा गृहीतक मान्य करून भूमितीचा पुढचा अभ्यास करणार आहोत. या गृहीतकाखेरीज समांतर रेषेची इतर गृहीतके मान्य केल्यास मिळणाऱ्या निष्कर्षांचा विचार या पुस्तकात होणार नाही.

समांतर रेषांच्या व्युत्क्रम कोन कसोटीच्या प्रमेयाच्या व्यत्यासाप्रमाणे संगत कोन कसोटीच्या प्रमेयाचा व्यत्यास खाली सांगितला आहे.

§ 8·27 ▪ प्रमेय :

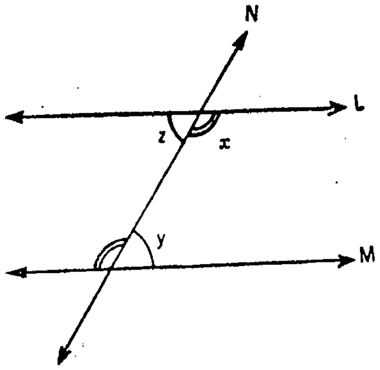
जर दोन समांतर रेषांना एक छेदिका छेदत असेल तर होणारे संगत कोन एकरूप असतात.

या व्यत्यासाची सिद्धता तुम्ही स्वतः लिहून काढा. सिद्धतेसाठी वर सिद्ध केलेल्या व्यत्यासाचा व विरुद्ध कोनांच्या प्रमेयाचा आधार घ्या किंवा स्वतंत्रपणे अप्रत्यक्ष सिद्धता वापरा.

आता समांतर रेषेच्या आंतर कोन कसोटीचा व्यत्यास पाहा.

§ 8·28 ■ **प्रमेय :**

दोन समांतर रेषांना एका छेदिकेने छेदले असता छेदिकेच्या एकाच अंगास असणारे आंतर कोन एकमेकांचे पूरक असतात.



आ. 8·46

आ. 8·46 च्या आधारे खाली विचारलेल्या प्रश्नांची उत्तरे द्या व त्या उत्तरांच्या साहाय्याने सिद्धता पूर्ण करा.

आपल्याला काय सिद्ध करायचे आहे ?

$\angle z$ व $\angle y$ हे कोणते कोन आहेत ?

रेषा L व रेषा M यांच्यांत कोणता संबंध दिला आहे ?

रेषा L व रेषा M यांच्या या संबंधामुळे $\angle z$ व $\angle y$ यांच्यात कोणता संबंध प्रस्थापित होतो ? व तो कोणत्या प्रमेयाच्या आधारे ?

$\angle z$ व $\angle x$ हे कोणते कोन आहेत ?

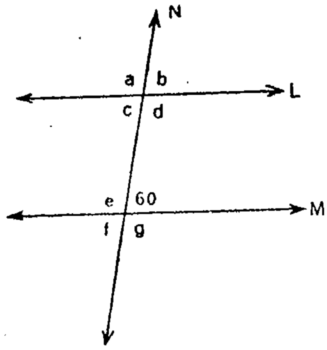
$\angle z$ व $\angle x$ यांच्या मापात कोणता संबंध आहे ?

$\angle z$ व $\angle y$ यांच्यामधील संबंध, तसेच $\angle z$ व $\angle x$ यांच्यामधील संबंध विचारात घेतल्यास $\angle x$ व $\angle y$ यांच्यात काय संबंध सांगता येतो ?

हाच संबंध आपल्याला सिद्ध करायचा होता काय ?

§ **8·29** वरील व्यत्यासांचा अभ्यास केल्यानंतर त्यात दाखवलेल्या समांतर रेषांसंबंधीच्या गुणधर्मांचा कसा उपयोग करता येतो हे खालील उदाहरणांवरून स्पष्ट होईल.

उदा. 1 : आ. 8·47 मध्ये रेषा L ∥ रेषा M असून रेषा N ही त्यांची छेदिका आहे. त्यांतील एका कोनाचे माप 60 आहे. तर बाकीच्या कोनांची मापे सांगा. प्रत्येक वेळेस तुमच्या विधानाला पुष्टी देणारे कारण सांगा.



आ. 8·47

सिद्धता : रेषा L ∥ रेषा M आणि रेषा N ही त्यांची छेदिका.

$\therefore m\angle c = 60$ ...व्युत्क्रम कोन कसोटीचा व्यत्यास.

$m\angle b = 60$ ...संगत कोन कसोटीचा व्यत्यास.

$m\angle d = 120$ ...आंतर कोन कसोटीचा व्यत्यास.

$m\angle e = 120$ ...पूरक कोनाची व्याख्या.

$m\angle a = m\angle e = 120$ ...संगत कोन कसोटीचा व्यत्यास.

$m\angle f = m\angle c = 60$ ”

$m\angle d = m\angle g = 120$ ”

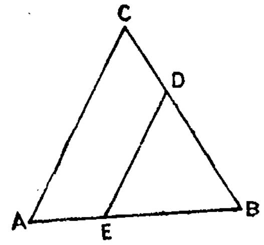
उदा. 2 :

पक्ष : आकृती 8·48 मध्ये

रेख AC ≅ रेख BC

रेख DE ∥ रेख CA

साध्य : रेख DE ≅ रेख DB.



आ. 8·48

सिद्धता : खालील सिद्धतेत प्रत्येक विधानापुढे योग्य कारण दया.

1. रेख AC ≅ रेख BC ......
2. ∴ ∠A ≅ ∠B ......
3. रेख DE ∥ रेख CA ......
4. ∴ ∠CAB ≅ ∠DEB ......
5. ∴ ∠DEB ≅ ∠B ......
6. ∴ रेख DE ≅ रेख DB ......

§ 8·30 **उपप्रमेय :**

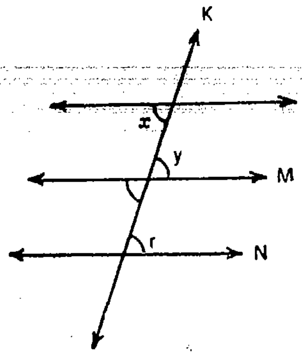
एका प्रतलात एकाच रेषेला समांतर असलेल्या दोन रेषा परस्परांना समांतर असतात.

पक्ष : रेषा L ∥ रेषा M आणि

रेषा L ∥ रेषा N.

रेषा K ही रेषा L, रेषा M व रेषा N यांची छेदिका आहे. (आ. 8·49)

साध्य : रेषा M ∥ रेषा N



आ. 8·49

सिद्धता : रिकाम्या जागी योग्य शब्द भरून सिद्धता पूर्ण करा.

1. रेषा L ∥ रेषा M
2. ∴ ∠x ≅ ∠ ______ व्युत्क्रम कोन कसोटी चा व्यत्यास.
3. तसेच रेषा L ∥ रेषा ______ पक्ष.
4. ∴ ∠x ≅ ∠ ______ व्युत्क्रम कोन एकरूप.
5. ∴ ∠ ______ ≅ ∠ ______ विधान 2 व 4 वरून.
6. परंतु हे ______ कोन आहेत.
7. ∴ रेषा M ∥ रेषा N ......

हेच प्रमेय अप्रत्यक्ष सिद्धता देऊन सिद्ध करून दाखवा.

§ 8·31 **उपप्रमेय :**

दोन समांतर रेषांपैकी एका रेषेला जर त्याच प्रतलातील तिसरी एक रेषा लंब असेल तर ती रेषा दुसऱ्या रेषेलाही लंब असते.

योग्य आकृती काढून या उपप्रमेयाची सिद्धता लिहा.

§ 8·32 प्रश्न :

1. रिकाम्या जागी योग्य शब्द भरा.

(i) जर एका प्रतलातील दोन रेषांना एक ________ छेदत असेल व होणारे व्युत्क्रम कोन एकरूप असतील तर त्या रेषा ________ असतात.

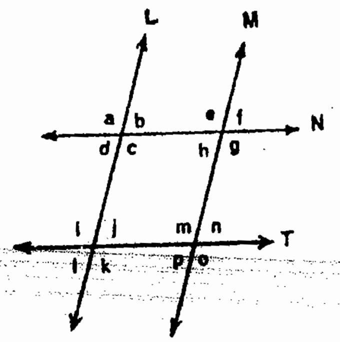
(ii) दोन समांतर रेषांना एका छेदिकेने छेदले असता तिच्या एकाच अंगास असणारे आंतर कोन ________ असतात.

(iii) जर दोन ________ रेषांपैकी एका रेषेला एक छेदिका लंब असेल तर ती दुसऱ्या रेषेला ________ असते.

(iv) दिलेल्या रेषेला तिच्या बाहेरील बिंदूतून ________ व ________ समांतर रेषा काढता येते.

(v) एका प्रतलात एकाच रेषेला ________ असलेल्या दोन रेषा परस्परांस समांतर असतात.

2. आकृती 8·50 मध्ये रेषा L ∥ रेषा M आणि रेषा N ∥ रेषा T आहे.



आ. 8·50

तर खालीलपैकी कोणती विधाने सत्य आहेत हे सांगा. प्रत्येक वेळी कारण सांगा.

(i) $\angle a \cong \angle i$

(ii) $\angle k \cong \angle o$

(iii) $\angle j \cong \angle m$

(iv) $\angle c \cong \angle e$

(v) $\angle n \cong \angle p$

(vi) $\angle a \cong \angle k$

(vii) $\angle i \cong \angle m$

(viii) $\angle i \cong \angle o$

(ix) $m\angle c + m\angle h = 180$

(x) $m\angle p + m\angle c = 180$

(xi) $\angle j \cong \angle b$

3. उदाहरण (2) मधील आकृतीच्या साहाय्याने खाली $\angle f \cong \angle l$ हे सिद्ध करून दाखवले आहे. सिद्धतेतील प्रत्येक विधानाला कारण दया.

$\angle f \cong \angle h$

$\angle h \cong \angle n$

$\angle n \cong \angle p$

$\angle p \cong \angle l$

$\therefore \angle f \cong \angle l$

4. रेषा L आणि रेषा M या दोन रेषा E या प्रतलात असून परस्परांना छेदतात. तर खालील प्रश्नांची कारणांसहित उत्तरे दया.

(i) जर रेषा N ही देखील E प्रतलात असेल तर तिने रेषा L अथवा M यांपैकी कुणाला तरी अथवा दोहोंनाही छेदले पाहिजे. का?

(ii) जर E प्रतलातच रेषा K ∥ रेषा M असेल तर रेषा K ही रेषा L ला छेदील का?

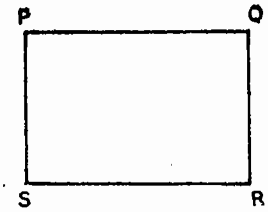
(iii) जर रेषा K ही रेषा M ला समांतर नसेल तर ती रेषा M ला नक्की छेदील का?

(iv) जर रेषा S ही रेषा L व रेषा M या दोघींनाही छेदत असेल तर ती E प्रतलात असावयास पाहिजे का?

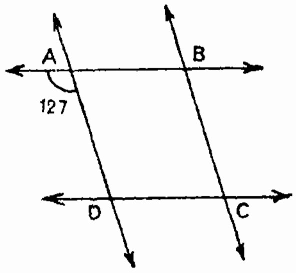
5. आ. 8·51 मध्ये चौकोन PQRS असून त्यात

$m\angle S = m\angle Q = m\angle R = 90$

तर सिद्ध करा की रेख SP ⊥ रेख PQ.



आ. 8·51



आ. 8·52

6. आ. 8·52 मध्ये

(i) जर रेषा AB ∥ रेषा DC असेल

व $m\angle A = 127$ असेल

तर $m\angle ADC$ = किती ?

(ii) जर रेषा AB ∥ रेषा DC

आणि रेषा AD ∥ रेषा BC असेल

तर $m\angle BCD$ = किती ?

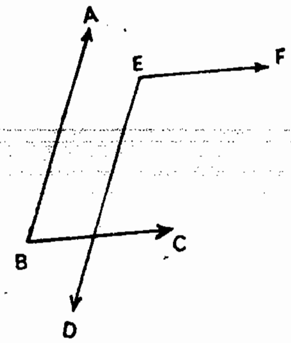
7. पक्ष : आ. 8·53 मध्ये

रेषा AB ∥ रेषा ED

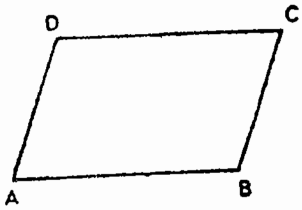
व रेषा EF ∥ रेषा BC

साध्य : ∠ABC व ∠DEF

हे पूरक कोन आहेत.



आ. 8·53



आ. 8·54

8. आ. 8·54 मध्ये ABCD या चौकोनात

रेख AD ∥ रेख BC

रेख AB ∥ रेख DC असेल तर

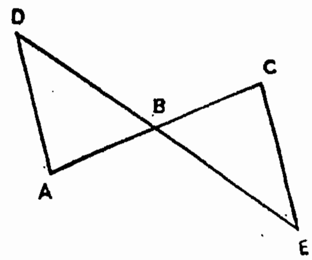
रेख AB ≅ रेख CD हे सिद्ध करा.

(सूचना : रेख AC काढा.)

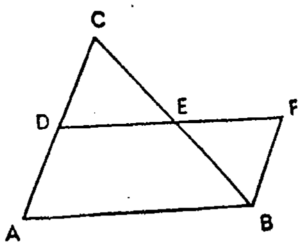
9. पक्ष : आ. 8·55 मध्ये रेख AB ≅ रेख CB

रेख AD ∥ रेख CE

साध्य : रेख AD ≅ रेख CE



आ. 8·55



आ. 8·56

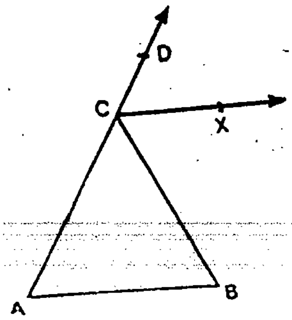
10. **पक्ष :** शेजारच्या आकृतीत △ ABC दिला असून रेख BF ∥ रेख AC व रेख BE ≅ रेख CE.

साध्य : रेख BF ≅ रेख CD.

11. आ. 8·56 मध्ये,

पक्ष : △ ABC दिला असून रेख DC ∥ रेख BF व रेख DC ≅ रेख BF

साध्य : रेख CE ≅ रेख BE.



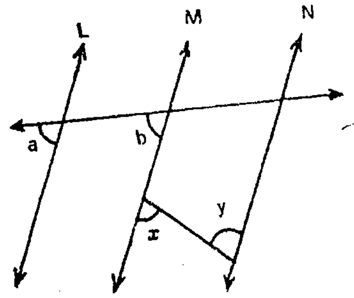
आ. 8·57

12. **पक्ष :** आ. 8·57 मध्ये △ ABC चा ∠ DCB हा बाह्यकोन असून रेख AC ≅ रेख BC व किरण CX ∥ किरण AB.

साध्य : किरण CX हा ∠ DCB दुभागतो.

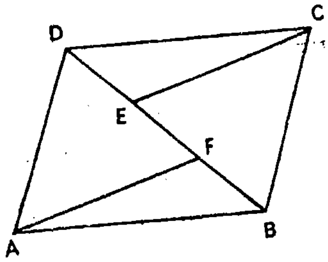
13. **पक्ष :** आ. 8·58 मध्ये ∠ a ≅ ∠ b आणि ∠ x ≅ ∠ y.

साध्य : रेषा L ∥ रेषा N



आ. 8·58

14. रेषा AB व रेषा CD ह्या समांतर रेषा असून रेषा EF ही त्यांची छेदिका आहे. सिद्ध करा की रेषा EF ही रेषा CD ला समांतर नाही.



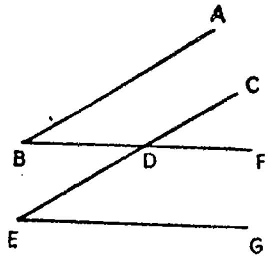
आ. 8·59

15. **पक्ष :** आ. 8·59 मध्ये ABCD चौकोन असून रेख DE ≅ रेख FB रेख AB ≅ रेख DC ∠ ADC ≅ ∠ ABC ∠ ADE ≅ ∠ FBC

साध्य : रेख AF ∥ रेख EC

16. **पक्ष** : आ. 8·60 मध्ये
रेख AB ∥ रेख CE
रेख BF ∥ रेख EG.

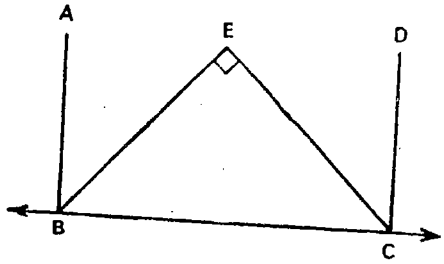
साध्य : $\angle ABF \cong \angle CEG$.



आ. 8·60

17. **पक्ष** : आ. 8·61 मध्ये
रेख AB ∥ रेख DC
रेख AB ⊥ रेख BC
किरण BE हा $\angle ABC$ चा कोनदुभाजक आहे. तसेच किरण CE हा $\angle BCD$ चा कोनदुभाजक आहे.

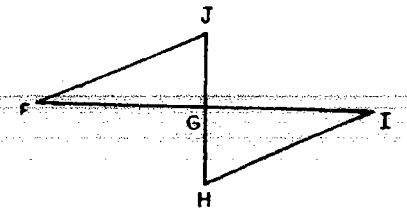
साध्य : रेख BE ≅ रेख CE.



आ. 8·61

18. **पक्ष** : आ. 8·62 मध्ये रेख FJ ∥ रेख HI
रेख FJ ≅ रेख HI

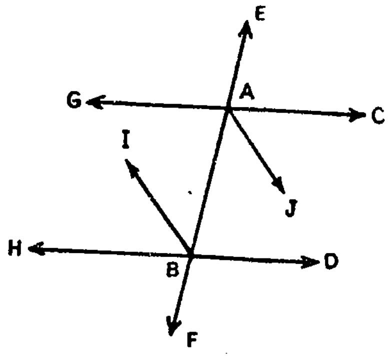
साध्य : G हा रेख IF चा मध्यबिंदू आहे.



आ. 8·62

19. **पक्ष** : रेषा GC व रेषा HD ह्या रेषा एकाच प्रतलात असून रेषा EF ही त्यांना अनुक्रमे A आणि B बिंदूंत छेदते. किरण BI हा $\angle HBA$ दुभागतो. किरण AJ हा $\angle BAC$ दुभागतो. किरण AJ ∥ किरण BI (आ. 8·63).

साध्य : रेषा GC ∥ रेषा HD.



आ. 8·63

आपण काय शिकलो ?

(1) **संज्ञा–व्याख्या** :

समांतर रेषा; नैकप्रतलीय (किंवा वितलीय) रेषा; रेषाखंडांची व किरणांची समांतरता; छेदिका.

(2) **कल्पना** :

आंतर कोन; व्युत्क्रम कोन; संगत कोन.

(3) **गृहीतक :**

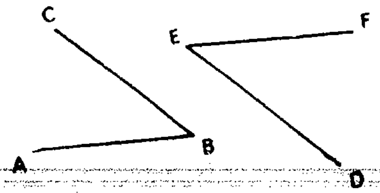
समांतर रेषेचे एकमेवत्व.

(4) **प्रमेये :** (i) समांतर रेषांची कसोटी (ii) समांतर रेषांचे अस्तित्व (iii) दोन समांतर रेषांची एकप्रतलीयता (iv) व्युत्क्रम कोनांची एकरूपता (v) समांतर रेषांची व्युत्क्रम कोन कसोटी (vi) समांतर रेषांना छेदणाऱ्या छेदिकेमुळे होणारे व्युत्क्रम कोन (vii) समांतर रेषांना छेदणाऱ्या छेदिकेमुळे होणारे संगत कोन (viii) समांतर रेषांना छेदणाऱ्या छेदिकेमुळे होणारे आंतर कोन

उपप्रमेये :

(i) दोन समांतर रेषांना छेदिकेने छेदले असता होणारे संगत कोन एकरूप असतील तर व्युत्क्रम कोन एकरूप असणे (ii) समांतर रेषांची संगत कोन कसोटी (iii) समांतर रेषांची आंतर कोन कसोटी (vi) एका प्रतलात एकाच रेषेला समांतर असणाऱ्या रेषा (v) दोन समांतर रेषांपैकी एका रेषेला लंब असणारी त्याच प्रतलातील तिसरी रेषा.

प्रश्नसंग्रह

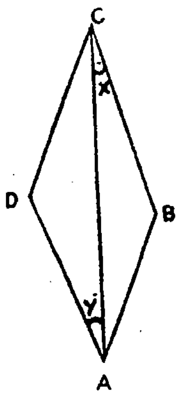


आ. 8·64

1. **पक्ष :** आ. 8·64 मध्ये $\angle B \cong \angle E$ आणि रेख AB ∥ रेख EF

साध्य : रेख BC ∥ रेख ED

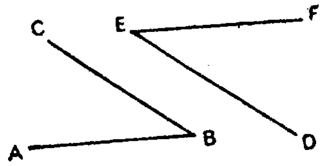
(सूचना : रेख AB ही रेख ED ला छेदेपर्यंत वाढवा.)



आ. 8·65

2. **पक्ष :** रेख AB ∥ रेख DC व रेख AB ≅ रेख DC (आ. 8·65)

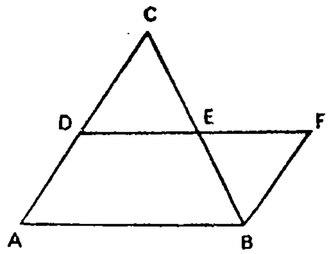
साध्य : $\angle x \cong \angle y$



आ. 8·66

3. **पक्ष :** आ. 8·66 मध्ये
रेख AB ∥ रेख EF
रेख BC ∥ रेख DE

साध्य : $\angle B \cong \angle E$.



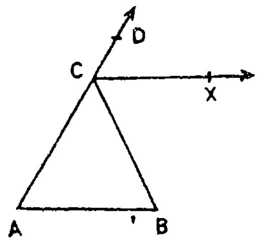
आ. 8·67

4. **पक्ष** : आ. 8·67 मध्ये
रेख BF ∥ रेख AC
रेख DE ≅ रेख FE

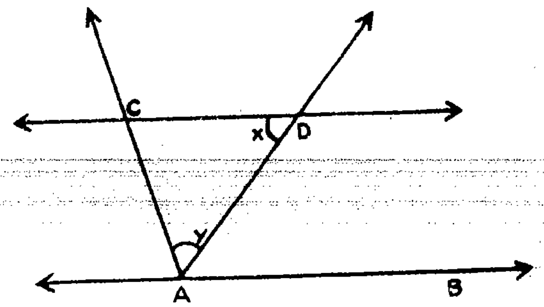
साध्य : रेख CE ≅ रेख BE

5. **पक्ष** : आ. 8·68 मध्ये △ ABC चा ∠ DCB हा बाह्यकोन असून किरण CX हा ∠ DCB चा दुभाजक आहे आणि किरण CX ∥ रेख AB.

साध्य : △ ABC हा समद्विभुज त्रिकोण आहे.



आ. 8·89



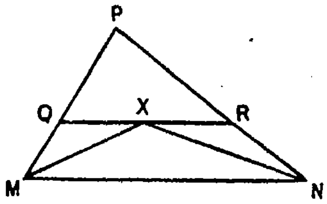
आ. 8·69

6. **पक्ष** : आ. 8·69 मध्ये किरण AD हा ∠ CAB चा कोनदुभाजक असून रेख AC ≅ रेख CD

साध्य : रेषा CD ∥ रेषा AB

7. रेषा CA व रेषा AB ह्या परस्परांना लंब असून त्याच प्रतलात तिसरी रेषा EF आहे.
   (a) जर रेषा EF ⊥ रेषा BC असेल तर रेषा EF ही रेषा AC ला छेदेल का?
   (b) जर रेषा EF ⊥ रेषा AB असेल तर रेषा EF ही रेषा AC ला छेदेल का?
   (c) जर रेषा EF वर A बिंदू असेल आणि ती रेषा जर रेषा BC ला G बिंदूत लंब असेल तर G हा B आणि C च्या दरम्यान राहील का?
   (d) जर रेषा EF ⊥ रेषा AC असेल तर रेषा EF ही रेषा BC ला छेदेल का?

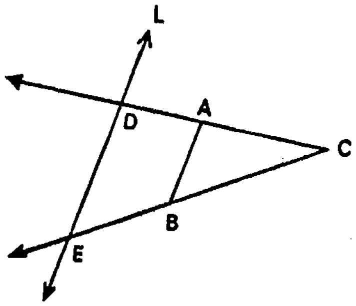
8. **पक्ष** : आ. 8·70 मध्ये △ PMN दाखवला असून किरण MX व किरण NX हे अनुक्रमे ∠ M व ∠ N चे दुभाजक आहेत. X मधून जाणारा रेख QR हा बाजू MN ला समांतर आहे.



आ. 8·70

साध्य : △ QMX व △ RXN हे दोन्ही समद्विभुज त्रिकोण आहेत.

9. चौकोनाच्या समोरासमोरील बाजू एकरूप असतील तर त्या चौकोनाच्या त्या बाजू समांतर असतात हे सिद्ध करा.



आ. 8·71

10. **पक्ष :** △ CAB च्या बाजू AB ला रेषा L ही समांतर असून ती किरण CA व किरण CE यांना अनुक्रमे D व E मध्ये छेदते.

साध्य : CAB ⟷ CDE ही एकास एक संगती असलेल्या त्रिकोणांतील संगत कोन एकरूप आहेत.

11. △ ABC मध्ये ∠ A चा दुभाजक बाजू BC ला D मध्ये छेदतो. बाजू AD चा लंबदुभाजक बाजू AC ला G मध्ये छेदतो.

    सिद्ध करा : रेखGD ∥ रेखAB.

12. दोन समांतर रेषांपैकी एका रेषेला जर त्याच प्रतलातील तिसरी एक रेषा छेदत असेल तर ती रेषा दुसऱ्या रेषेलाही छेदते हे सिद्ध करा.

13. दोन समांतर रेषांना एका छेदिकेने छेदले असता होणाऱ्या लगतच्या आंतर कोनांचे दुभाजक परस्परांशी काटकोन करतात हे सिद्ध करा.

14. एका प्रतलात दोन कोनांच्या संगत बाजू समांतर असतील तर ते कोन एकरूप असतात किंवा पूरक असतात हे सिद्ध करा.

15. एका प्रतलात परस्परांस छेदणाऱ्या दोन रेषांपैकी एका रेषेस त्याच प्रतलातील तिसरी रेषा समांतर असल्यास ती रेषा दुसऱ्या रेषेस समांतर नसते हे सिद्ध करा.

16. दोन समांतर रेषांना एक छेदिका छेदत असेल तर होणाऱ्या कोणत्याही संगत कोनांचे दुभाजक परस्परांना समांतर असतात हे सिद्ध करा.

17. परस्परांना छेदणाऱ्या दोन रेषांच्या प्रतलातील तिसरी एक रेषा जर त्या दोन रेषांपैकी एकीला लंब असेल तर ती दुसरीला लंब नसते हे सिद्ध करा.

पारिभाषिक शब्द

आंतर व्युत्क्रम कोन – Alternate Interior angles

छेदिका – Transversal

वितलीय – Skew

संगत कोन – Corresponding angles

समांतर – Parallel

प्रकरण 9

त्रिकोण व त्याचे गुणधर्म

§ 9·1 काही गृहीतके घेऊन त्यांच्या आधारे आपण आतापर्यंत पुष्कळसे भूमितीय गुणधर्म शिकलो. त्रिकोणाच्या कोनांच्या मापांसंबंधीही एक महत्वाचा गुणधर्म आपण प्रस्थापित केला होता तो म्हणजे 'त्रिकोणाच्या कोणत्याही बाह्यकोनाचे माप, त्याच्या असंलग्न आंतर कोनांपैकी प्रत्येकाच्या मापाहून मोठे असते.' त्यावरून त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन आंतर कोनांच्या मापांची बेरीज 180 पेक्षा कमीच असली पाहिजे हेही आपल्याला सिद्ध करता आले. दोन कोनांच्या मापांची बेरीज 180 पेक्षा कमी होते हे खरे. पण मग तिसऱ्या कोनाचे माप या बेरजेत मिळवले म्हणजे तरी बेरीज 180 होते की नाही? की तरीही कमीच भरते? की 180 पेक्षा जास्त होते? शेवटी, या बेरजेचा व 180 चा संबंध काय? आठवीच्या भूमितीत तुम्ही 'ही बेरीज 180 असते' असे शिकला आहात. पण त्यावेळेस तुम्ही हा गुणधर्म अभ्यासण्यासाठी अनेक त्रिकोण काढलेत, त्यांच्या कोनांच्या मापांची बेरीज केलीत व त्यावरून वरील निष्कर्ष काढलात.

त्रिकोणाच्या कोनांच्या मापांची बेरीज 180 असते हे विधान प्रमेय म्हणून मान्य व्हायचे असेल तर गृहीतके आणि आधी सिद्ध झालेल्या गुणधर्मांचा आधार घेऊनच ते विधान तर्कशुद्ध युक्तिवादाने आपल्याला सिद्ध करावे लागेल. प्रस्तुत प्रकरणात या विधानाची सिद्धता दिलेली आहे. येथे विद्यार्थ्यांनी हे लक्षात घेणे आवश्यक आहे की वरील विधान हे समांतर रेषेसंबंधीचे गृहीतक मान्य केल्यावाचून तर्कशुद्ध पद्धतीने सिद्ध करता येत नाही. तेव्हा आपण एवढेच म्हणू शकतो की जर समांतर रेषेचे गृहीतक ही वस्तुस्थिती असेल तर त्रिकोणाच्या कोनांच्या मापांची बेरीज 180 असते ही देखील वस्तुस्थिती असली पाहिजे. यापुढे येणारी प्रमेयेही त्रिकोणाच्या कोनांबाबतच्या प्रमेयावर आधारित असल्यामुळे पर्यायाने ती देखील समांतर रेषांबाबत आपण स्वीकारलेल्या, युक्लिडच्या गृहीतकावर आधारलेली आहेत याची जाणीव आपण सदैव बाळगली पाहिजे. युक्लिडच्या गृहीतकाऐवजी जर आपण लोबाशेवस्कीचे किंवा अन्य (समांतररेषेची एकमेवता किंवा अस्तित्व अमान्य करणारे) गृहीतक स्वीकारले तर आपल्याला वेगळेच गुणधर्म मिळतील. समांतर रेषांविषयीच्या अशा वेगवेगळ्या गृहीतकानुसार भूमितीसंबंधीचे वेगवेगळे सिद्धांत मांडता येतात. पण आपल्याला या पुस्तकात फक्त युक्लिडने मांडलेल्या भूमितीचाच विचार करायचा आहे.

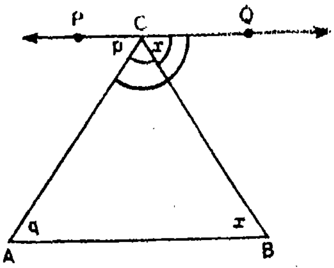
§ 9·2 ▪ **प्रमेय :**

कोणत्याही त्रिकोणाच्या आंतर कोनांच्या मापांची बेरीज 180 असते.

पक्ष : $\triangle ABC$ हा एक दिलेला त्रिकोण आहे.

साध्य : $m\angle BAC + m\angle ABC + m\angle ACB = 180.$

सिद्धता :



आ. 9·1

(i) A, B व C हे त्रिकोणाचे शिरोबिंदू असल्यामुळे C हा, रेषा AB वर नाही. C या बाह्यबिंदूतून जाणारी व रेषा AB ला समांतर असणारी L ही रेषा आहे असे समजा. या L रेषेवर C बिंदूच्या विरुद्ध अंगास राहणारे दोन बिंदू घ्या. यांपैकी जो बिंदू रेषा AC च्या B बाजूस असेल त्यास Q हे नाव दया व दुसऱ्यास P हे नाव दया.

(ii) आता रेषा AC च्या एका अंगास B व Q हे बिंदू असून रेषा CQ च्या एकाच अंगास A व B हे बिंदू आहेत. (कारण रेख AB ∥ रेषा CQ) त्यामुळे B हा बिंदू $\angle ACQ$ च्या अंतर्भागात असला पाहिजे व म्हणून कोनांच्या बेरजेच्या गृहीतकानुसार,
$m\angle ACQ = m\angle ACB + m\angle BCQ$.

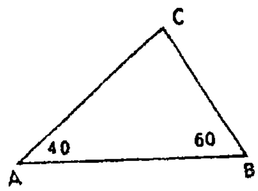
(iii) रेषा CQ ∥ रेषा AB असून त्यांना CB छेदते. तेव्हा समांतर रेषांच्या व्युत्क्रम कोनांच्या प्रमेयानुसार $m\angle BCQ = m\angle ABC$. तसेच याच समांतर रेषांसाठी छेदिका AC चे व्युत्क्रमकोन म्हणून, $m\angle PCA = m\angle CAB$.

(iv) किरण CP व किरण CQ हे विरुद्ध किरण असल्यामुळे $\angle PCA$ आणि $\angle QCA$ यांची रेषीय जोडी होते. त्यावरून पूरक कोन गृहीतकानुसार
$m\angle PCA + m\angle QCA = 180$.
$\therefore m\angle PCA + (m\angle ACB + m\angle BCQ) = 180$ (परिच्छेद ii वरून)
$\therefore m\angle CAB + m\angle ACB + m\angle BCQ = 180$ (परिच्छेद iii वरून)
$\therefore m\angle CAB + m\angle ACB + m\angle ABC = 180$ (परिच्छेद iii वरून)

वरील प्रमेयाच्या सिद्धतेतील काही बारकाव्यांचा अभ्यास करणे आवश्यक आहे. उदाहरणार्थ (i) ही सिद्धता समांतर रेषा गृहीतकावर अवलंबून आहे. (ii) B बिंदू हा $\angle ACQ$ च्या अंतर्भागात असतो हे दाखवण्यावरच पुढील सिद्धता अवलंबून आहे. (iii) B बिंदू हा $\angle ACB$ च्या अंतर्भागात आहे हे सिद्ध करताना समांतर रेषेच्या व्याख्येचा उपयोग करावा लागतो.

प्रमेयाच्या सिद्धता लिहिण्याचा आणि समजण्याचा आपल्याला बराच सराव झाला आहे. त्यामुळे अगदी सुरुवातीच्या प्रमेयांमध्ये जेवढ्या बारीकसारीक मुद्दयांचा परामर्श आपण घेतला तेवढा यानंतरच्या प्रमेयांच्या सिद्धतांमध्ये आपण घेणार नाही. केवळ विशेष महत्त्वाच्या पायऱ्यांचा निर्देश मात्र राहील.

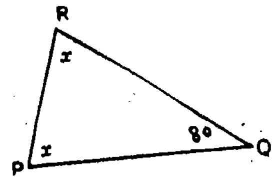
§ 9·3 प्रश्न :



आ. 9·2

1. दिलेल्या आकृतीतील (आ. 9·2) $m\angle ACB$ ओळखा.
2. पुढील संच एकेका त्रिकोणाच्या तीन कोनांच्या मापांचे आहेत. संचातील मोकळया जागेचा घटक शोधा.
   (i) {20, 33, — }, (ii) { 47, — ,63}
   (iii) { — , 13·5, 40·3 },
   (iv) {x, y, — } (v) { (45+a), — , (45−a) }

3. बाजूच्या आकृतीतील (आ. 9·3) x ची किंमत ठरवा.



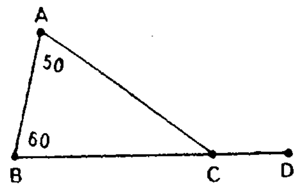
आ. 9·3

4. पुढील संच एकेका त्रिकोणाच्या तीन कोनांच्या मापांचे आहेत. त्यांतील x ची किंमत लिहा.

(i) $\{x, 2x, 108\}$; तर $x=$················

(ii) $\{x, x+5, x-5\}$; तर $x=$··············.

(iii) $\{x, 2x, 3x\}$; तर $x=$················



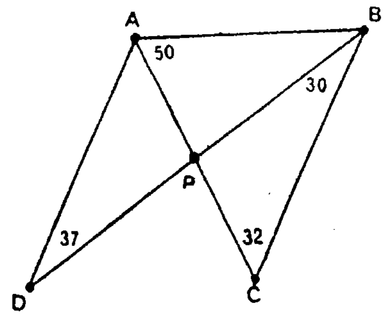
आ. 9·4

5. बाजूच्या आकृतीतील $m\angle ACB$ व $m\angle DCA$ किती ते लिहा.

6. $\triangle ABC$ व $\triangle PQR$ यांबाबत पुढील माहिती दिली आहे.
$m\angle A=m\angle R$ व $m\angle B=m\angle P$;
तर $\angle C$ व $\angle Q$ यांबाबत कोणते विधान करता येईल ?

7. दोन त्रिकोणांच्या एखादया संगतीनुसार एकाचे दोन कोन दुसऱ्याच्या संगत कोनांशी एकरूप आहेत. तर पहिल्या त्रिकोणाचा उरलेला कोन, दुसऱ्या त्रिकोणाच्या उरलेल्या कोनाशी एकरूप असलाच पाहिजे काय ? सिद्ध करा.

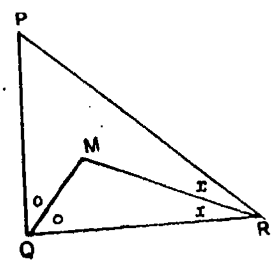
8. दोन त्रिकोणांच्या एखादया संगतीनुसार एका त्रिकोणाचे दोन कोन व एक बाजू हे दुसऱ्या त्रिकोणाच्या संगतभागांशी एकरूप असल्यास ती संगती म्हणजे त्या त्रिकोणांची एकरूपता असते, हे सिद्ध करा.



आ. 9·5

9. आ. 9·5 मधील सर्व बिंदू एकाच प्रतलात आहेत. काही कोनांची मापे दिली आहेत. उरलेल्या कोनांची मापे ठरवा.

10. एका समद्विभुज त्रिकोणातील एका कोनाचे माप 40 आहे. तर त्या त्रिकोणाच्या कोनांच्या मापांचे संभाव्य संच लिहा.



आ. 9·6

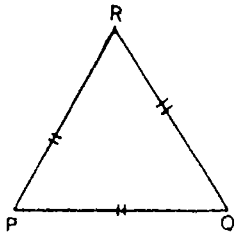
11. आ. 9·6 मध्ये किरण RM हा $\angle PRQ$ चा दुभाजक असून किरण QM हा $\angle PQR$ चा दुभाजक आहे. सिद्ध करा की

$$m\angle QMR=90+\tfrac{1}{2}\,m\angle QPR$$

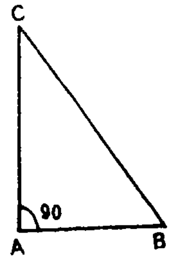
§ 9·4 त्रिकोणाच्या कोनांच्या मापांच्या बेरजेचे महत्वपूर्ण प्रमेय आपण पाहिले, त्याच्या साहयाने जे अनेक गुणधर्म अगदी चटकन सिद्ध होतात त्यांपैकी काही प्रमेयरूपात पुढे मांडले आहेत. या प्रमेयांच्या सिद्धता तुम्ही स्वतः दयाव्यात.

§ 9·5 ▪ प्रमेय :

समभुज त्रिकोणाच्या प्रत्येक कोनाचे माप 60 असते. (आ. 9·7 पाहा.)



आ. 9·7

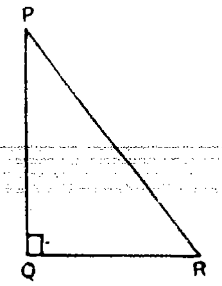


आ. 9·8

§ 9·6 ▪ प्रमेय :

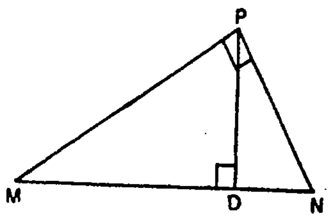
काटकोन त्रिकोणातील लघुकोन हे परस्परांचे कोटिकोन असतात. (आ. 9·8 पाहा.)

§ 9·7 प्रश्न :



आ. 9·9

1. बाजूच्या आकृतीत $m\angle Q=90$ आहे. तर
   (i) $m\angle P=20$ असल्यास $m\angle R=$?
   (ii) $m\angle P : m\angle R=1 : 4$ असेल तर $m\angle P=$?
   (iii) $m\angle P=x$; $m\angle R=y$ आणि $x=y-10$ असल्यास, $y=$?



आ. 9·10

2. बाजूच्या आकृतीत, $m\angle MPN=90$
   रेख PD ⊥ रेख MN,
   तर सिद्ध करा की
   $m\angle DMP=m\angle DPN$.

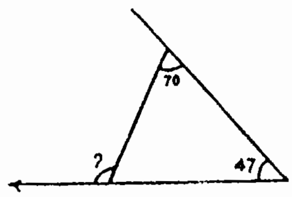
3. खाली संख्यांच्या काही जोड्या दिल्या आहेत. त्यांपैकी कोणत्या जोड्या काटकोन त्रिकोणाच्या लघुकोनांची मापे असू शकतील?
   (i) 15, 85 (ii) 5, 85 (iii) $22\frac{1}{2}$, $67\frac{1}{2}$ (iv) 120, 60.

4. काटकोन त्रिकोणाच्या एका कोनाचे माप 45 असल्यास त्याच्या कर्णाखेरीज इतर दोन बाजू **एकरूप** असतात हे सिद्ध करा.

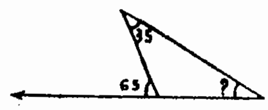
5. 'समद्विभुज त्रिकोणाच्या एका कोनाचे माप 60 असल्यास तो त्रिकोण समभुज असतो' हे विधान खरे की खोटे ते सकारण सांगा.

6. खालील आकृतींतील प्रश्नांकित कोनांचे माप ओळखा.

(i) (ii)



आ. 9·11



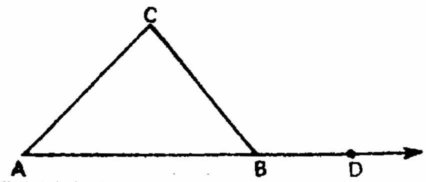
आ. 9·12

§ 9·8 ■ **प्रमेय : बाह्यकोन प्रमेय (समानताविषयक)**

त्रिकोणाच्या बाह्यकोनाचे माप त्याच्या दोन असंलग्न आंतरकोनांच्या मापांच्या बेरजेएवढे असते.

पक्ष : $\triangle ABC$ चा $\angle CBD$ हा एक बाह्यकोन आहे.

साध्य : $m\angle CBD = m\angle BAC + m\angle BCA$



आ. 9·13

सिद्धता :

त्रिकोणाच्या बाह्यकोनाच्या व्याख्येनुसार, $\angle CBD$ हा बाह्यकोन आहे म्हणजे किरण BD व किरण BA हे विरुद्ध किरण आहेत.

त्यामुळे $\angle CBD$ व $\angle CBA$ यांची रेषीय जोडी होते.

म्हणून, पूरककोन गृहीतकानुसार $m\angle CBD + m\angle CBA = 180$ (i)

व त्रिकोणातील कोनांच्या मापांच्या बेरजेच्या प्रमेयानुसार $\triangle ABC$ मध्ये

$m\angle CBA + m\angle CAB + m\angle ACB = 180.$ (ii)

तेव्हा (i) व (ii) वरून

$m\angle CBD + m\angle CBA = m\angle CBA + m\angle CAB + m\angle ACB$

$\therefore m\angle CBD = m\angle CAB + m\angle ACB$

§ 9·9 **प्रश्न :**

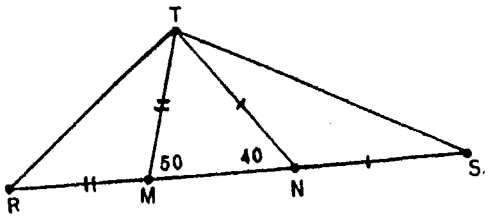
1. पुढे त्रिकोणाच्या कोनांची मापे दिली आहेत. त्या त्या त्रिकोणाच्या सर्व बाह्यकोनांची मापे सांगा

(i) $\{90, 20, 70\}$ (ii) $\{90, 30, 60\}$

(iii) $\{110, 20, 50\}$ (iv) $\{28, 140, 12\}$.

2. त्रिकोणाच्या बाह्यकोनांपैकी फार तर एखादाच बाह्यकोन हा लघुकोन असतो हे सिद्ध करा.

3. खालील आकृतीवरून प्रश्नचिन्हांकित कोनाचे माप किती हे ओळखा.



आ. 9·14

रेखRM ≅ रेखTM

व रेख TN ≅ रेख NS

तर (i) $m\angle RTM = ?$

(ii) $m\angle STN = ?$

(iii) $m\angle MTN = ?$

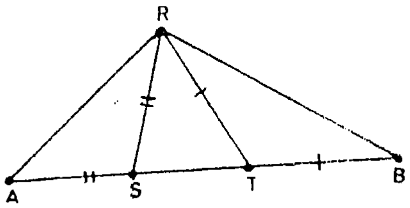
4. बाजूच्या आकृतीत,

$l(AS) = l(RS)$

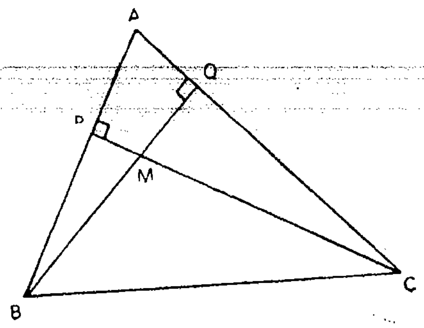
$l(RT) = l(BT)$

व $m\angle SRT = 70$

तर $m\angle ARB = ?$



आ. 9·15



आ. 9·16

5. बाजूच्या आकृतीत,

रेख CP ⊥ रेख AB.

रेख BQ ⊥ रेख AC.

रेख BQ व रेख CP परस्परांस M मध्ये छेदतात.

तर सिद्ध करा की,

$m\angle QBC + m\angle PCB = m\angle BAC$

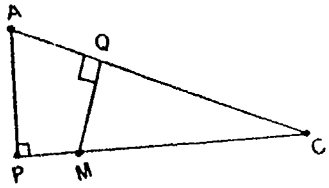
6. बाजूच्या आकृतीत,

$m\angle APC = 90$

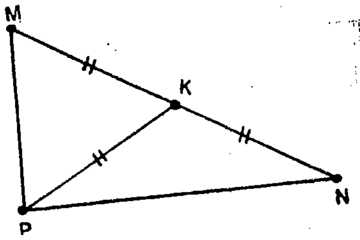
M हा रेख PC चा एक बिंदू असून

रेख MQ ⊥ रेख AC.

तर सिद्ध करा की $\angle PAC \cong \angle QMC$



आ. 9·17



आ. 9·18

7. बाजूच्या आकृतीत △ MNP च्या बाजू MN चा K हा मध्यबिंदू आहे.

$l(PK) = \frac{1}{2}\, l(MN)$.

तर सिद्ध करा की $m\angle MPN = 90$.

§ 9·10 आणखी काही उपप्रमेये :

1. **एका त्रिकोणाचे दोन कोन दुसऱ्या त्रिकोणाच्या दोन कोनांशी एकरूप असतील तर पहिल्या त्रिकोणाचा उरलेला कोन दुसऱ्या त्रिकोणाच्या उरलेल्या कोनाशी एकरूप असतो.**
2. **त्रिकोणाच्या दोन कोनांच्या मापांची बेरीज जर त्याच्या उरलेल्या कोनाच्या मापाएवढी असेल तर तो काटकोन त्रिकोण असतो.**

§ 9·11 प्रश्न :

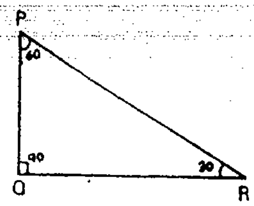
$\triangle$ PQR मध्ये $m\angle PQR = 90$. M हा रेख PR चा मध्यबिंदू आहे.
रेख MT $\perp$ रेख QR. तर सिद्ध करा की,

(i) रेषा MT $\parallel$ रेषा PQ (ii) $\triangle$ PMQ हा समद्विभुज आहे.

§ 9·12 ▪ प्रमेय : 30–60–90 प्रमेय

त्रिकोणाच्या तीन कोनांची मापे जर 30, 60 व 90 अशी असतील तर त्या त्रिकोणाची सर्वात लहान भुजा ही कर्णाच्या निम्म्या लांबीची असते.

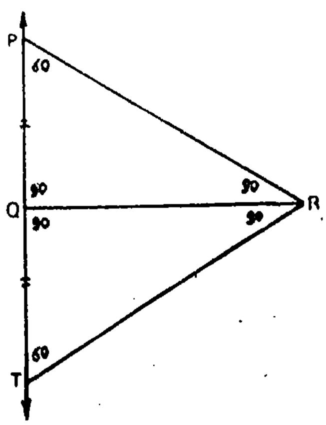
(म्हणजेच, 30 व 60 मापाचे कोन असणाऱ्या काटकोन त्रिकोणात 30 मापाच्या कोनासमोरील बाजू, कर्णाच्या निम्म्या लांबीची असते.)



आ. 9·19

पक्ष : $\triangle$ PQR मध्ये
$m\angle Q = 90$, $m\angle R = 30$ आणि
$m\angle P = 60$ आहे.

साध्य : $l(PQ) = \frac{1}{2}\, l(PR)$.



आ. 9·20

सिद्धता :

(i) किरण QP च्या विरुद्ध किरणावर T हा असा बिंदू घ्या की $l(PQ) = l(QT)$
आता, $\triangle$QTR हा Q येथे काटकोन असणारा काटकोन त्रिकोण आहे.

(ii) $\triangle$ PQR व $\triangle$ TQR यांमध्ये
रेख QR समाईक आहे.
रेख PQ $\cong$ रेख TQ ... (i)
व $\angle$ PQR $\cong \angle$ TQR ... (प्रत्येकी काटकोन)
$\triangle$ PQR $\cong \triangle$ TQR ... (बाकोबा गृहीतक)
त्यामुळे रेखPR $\cong$ रेखTR,
$m\angle QPR = m\angle QTR = 60$
व $m\angle PRQ = m\angle TRQ = 30$

(iii) Q हा P व T बिंदूंच्या दरम्यान असल्यामुळे तो (Q बिंदू) $\angle PRT$ च्या अंतर्भागात आहे व म्हणून कोनांच्या बेरजेच्या गृहीतकाने

$m\angle PRT = m\angle PRQ + m\angle TRQ$ ......(भाग ii)

$= 30 + 30$

$= 60$

(iv) $\triangle PTR$ मध्ये ....(पक्ष)

$m\angle TPR = 60$ ......(भाग ii)

$m\angle PTR = 60$ ......(भाग iii)

व $m\angle PRT = 60$

∴ त्या त्रिकोणाच्या तीनही बाजू एकरूप आहेत.

म्हणजे $l(PT) = l(TR) = l(PR)$

आता, Q हा P व T बिंदूंच्या दरम्यान असल्यामुळे

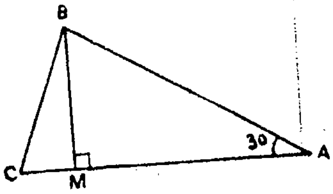
$l(PT) = l(PQ) + l(QT)$

पण $l(PQ) = l(QT)$

$\therefore l(PT) = 2l(PQ)$

$\therefore l(PR) = 2l(PQ)$

§ 9·13 प्रश्न :



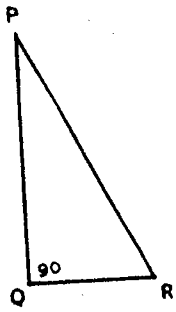
आ. 9·21

1. बाजूच्या आकृतीत, $\triangle ABC$ च्या $\angle ABC$ चे माप 90 आहे आणि $\angle BAC$ चे माप 30 आहे. रेख BM ⊥ रेख AC. जर $l(AC) = 8$ असेल; तर $l(MC) = 2$ आहे हे सिद्ध करा.

2. काटकोन त्रिकोणातील दोन लघुकोनांपैकी एकाचे माप दुसऱ्याच्या मापाच्या निम्मे असल्यास त्या लहान कोनासमोरील भुजा कर्णाच्या निम्म्या लांबीची असते, हे सिद्ध करा.

§ 9·14 ▪ प्रमेय :

काटकोन त्रिकोणाची एक भुजा जर कर्णाच्या निम्म्या लांबीची असेल तर त्या भुजेसमोरील कोनाचे माप 30 असते.



आ. 9·22

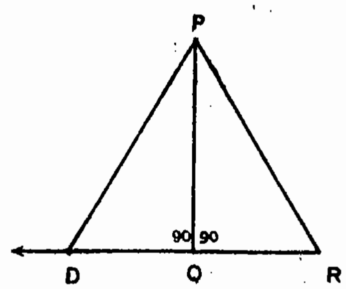
पक्ष : $\triangle PQR$ मध्ये

$m\angle PQR = 90.$

$l(QR) = \frac{1}{2}\, l(PR)$

साध्य : $m\angle QPR = 30$

सिद्धता :



आ. 9·23

(i) किरण QR च्या विरुद्ध किरणावर D हा असा बिंदू घ्या की l (QD) = l (QR) म्हणजे l(DR) = 2l (QR) होईल. पण पक्षाप्रमाणे l (QR) = l (PR) आहे.

∴ l (DR) = l (PR)

(ii) △ PQR व △ PQD यांमध्ये

रेख PQ समाईक आहे.

रेख QR ≅ रेख QD ... (भाग i)

∠ PQR ≅ ∠ PQD ... (दोन्हीही काटकोन)

∴ △ PQR ≅ △ PQD ... (बाकोबा गृहीतक)

∴ रेख PR ≅ रेख PD

व ∠ QPR ≅ ∠ QPD

(iii) रेख DR ≅ रेख PR ... (भाग i)

आणि रेख PR ≅ रेख PD ... (भाग ii)

∴ रेख PR ≅ रेख DR ≅ रेख PD

म्हणजे △ PDR हा समभुज त्रिकोण आहे.

व म्हणून त्याचे तीनही कोन एकरूप आहेत.

∴ m ∠ DPR = m ∠ DRP = m ∠ PDR = 60

(iv) Q बिंदू हा D व R बिंदूंच्या दरम्यान आहे. ... (भाग i)

∴ Q बिंदू हा ∠ DPR च्या अंतर्भागात आहे.

म्हणून कोनांच्या बेरजेच्या गृहीतकाने

m ∠ DPR = m ∠ DPQ + m ∠ QPR

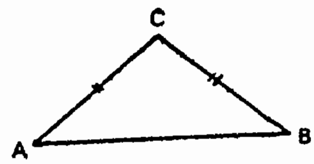
= m ∠ QPR + m ∠ QPR ... (भाग ii)

= 2 m ∠ QPR

पण m ∠ DPR = 60 ... (भाग iii)

∴ m ∠ QPR = 30

§ 9·15 प्रश्न :



आ. 9·24

△ ABC मध्ये,

m ∠ ACB = 120 आहे.

व l (AC) = l (BC) आहे.

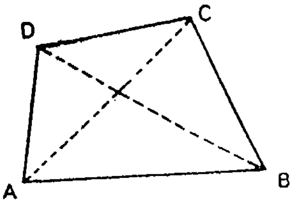
तर C बिंदूचे रेषा AB पासून अंतर ठरवा.

§ 9·16 चौकोन :

चौकोन म्हणजे काय ते आपल्याला स्थूलमानाने माहीत आहे.

चौकोनाकडे आता आपण जरा जास्त चौकस दृष्टीने पाहू.

सामान्यतः आपल्या कल्पनेतला चौकोन बाजूस दाखवलेल्या आकृतीप्रमाणे असतो.



आ. 9·25

येथे A, B, C व D हे चारही बिंदू एकाच प्रतलात असावेत ही आपली अपेक्षा असते. रेख AC व रेख BD यांनी परस्परांस छेदावे ही देखील आपली अपेक्षा असते.

एकाच रेषेवर नसलेले तीन बिंदू दिले असता त्रिकोण तयार होतो. हे तीन बिंदू एक प्रतल निश्चित करतात. हा त्रिकोण त्या प्रतलात असतो. ह्या बिंदूंना आपण त्या त्रिकोणाचे शिरोबिंदू म्हणतो. प्रत्येक शिरोबिंदू हा त्रिकोणाच्या दोन आणि दोनच भुजांचा समाईक अंत्यबिंदू असतो.

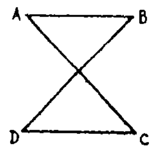
आता समजा A, B, C व D हे चार बिंदू दिले आहेत व त्यांपैकी कोणतेही तीन बिंदू एकरेषीय नाहीत. ह्यांपैकी कोणत्याही तीन बिंदूंमुळे एक प्रतल निश्चित होते, हे खरे; पण चौथा बिंदू हा या प्रतलात असेलच असे नाही. आता अशाही वेळी A, B, C व D या चार बिंदूंमुळे चौकोन तयार होतो असे आपण म्हणू शकतो. पण आपण प्रतलीय चौकोनांचाच विचार करणार असल्यामुळे A, B, C व D हे चारही बिंदू एकाच प्रतलात आहेत असे समजू व त्यांपैकी कोणतेही तीन बिंदू एकरेषीय नाहीत असेही धरून चालू.

आता या चार बिंदूंमुळे सहा रेषाखंड निश्चित होतात. ते असे—

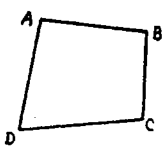
रेख AB, रेख BC, रेख CD, रेख AD, रेख BD आणि रेख AC.

येथे हे लक्षात घ्या की A हा बिंदू रेख AB, रेख AD आणि रेख AC ह्या तीन रेषाखंडांचा समाईक अंत्यबिंदू आहे. असेच विधान आपल्याला इतर तीन बिंदूंपैकी प्रत्येकाविषयी करता येते. पण आपण या सहा रेषाखंडांपैकी चार चार रेषाखंडांचे असे गट पाडू शकतो की A, B, C व D यांपैकी प्रत्येक बिंदू हा त्यातील दोन व दोनच रेषाखंडांचा समाईक अंत्यबिंदू असतो. ते गट असे —

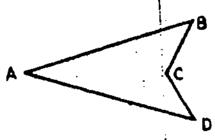
1. { रेख AB, रेख AC, रेख BD, रेख CD }



आ. 9·26

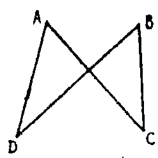


आ. 9·27



आ. 9·28

2. { रेख AB, रेख BC, रेख CD, रेख AD }



आ. 9·29

3. { रेख AC, रेख BC, रेख AD, रेख BD, }

यांपैकी कोणत्याही गटातील चार रेषाखंडांच्या संयोगास आपण प्रतलीय चौकोन म्हणू शकू पण आपण ज्या प्रकारच्या चौकोनांचा अभ्यास करणार आहोत त्याचा एक विशिष्ट गुणधर्म आहे जो इतर प्रकारच्या चौकोनांत नाही. वर दिलेल्या तीन गटांपैकी क्र. 2 च्या गटातील आकृती (9·28) पाहा.

आ. 9·28 मध्ये, रेख CB ला समाविष्ट करणाऱ्या रेषेच्या प्रत्येक अंगास चौकोन ABCD चा एकतरी बिंदू आहेच. उदाहरणार्थ, रेषा BC च्या विरुद्ध अंगास A व D हे बिंदू आहेत. तूर्त अशा चौकोनांचा विचार आपल्याला करायचा नाही.

याउलट, आ. 9·27 मध्ये, रेख AB, रेख BC, रेख CD व रेख AD ह्या चार रेषाखंडांपैकी कोणत्याही रेषाखंडाला समाविष्ट करणाऱ्या रेषेमुळे चौकोनाच्या प्रतलाचे ज्या दोन अर्धप्रतलांत विभाजन होते, त्यापैकी एकाच अर्धप्रतलात, चौकोनावरील (त्या रेषाखंडाचे बिंदू वगळल्यास) सर्व बिंदू असतात. आपण फक्त अशाच चौकोनांचा अभ्यास करणार आहोत. अशा चौकोनांना आपण बहिर्वक्र चौकोन म्हणू. येथे आपण हे लक्षात घेतले पाहिजे की बहिर्वक्र (convex) या शब्दाचा उपयोग आपण जरा वेगळा केला आहे. संचाच्या परिभाषेत ज्या अर्थाने आपण बहिर्वक्र हा शब्द वापरतो त्या अर्थाने तो येथे वापरलेला नाही. त्या अर्थाने आपल्या चौकोनाचा अंतर्भाग हा बहिर्वक्र संच असतो, पण **चौकोन मात्र बहिर्वक्र संच नसतो.**

तरीही वर वर्णन केलेल्या अशा चौकोनाच्या प्रकाराला आपण बहिर्वक्र चौकोनच म्हणणार आहोत. आतापर्यंत मांडलेल्या ह्या सर्व कल्पना आता आपण एका व्याख्येच्या स्वरूपात लिहू.

व्याख्या :

ज्यांपैकी कोणतेही तीन बिंदू एकरेषीय नाहीत अशा **चार** एकप्रतलीय बिंदूंना सांधून होणाऱ्या सहा रेषाखंडांपैकी ज्या **चार रेषाखंडांना** खालील गुणधर्म लागू पडतात त्या रेषाखंडाच्या संयोगास **बहिर्वक्र चौकोन** असे म्हणतात.
ते गुणधर्म असे –

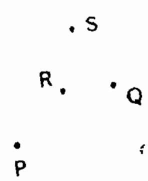
1. या चारपैकी प्रत्येक बिंदू हा चार रेषाखंडांपैकी दोन व दोनच रेषाखंडांचा समाईक अंत्यबिंदू असतो.
2. या चार रेषाखंडांपैकी दिलेल्या कोणत्याही रेषाखंडास समाविष्ट करणाऱ्या रेषेच्या एकाच बाजूला, त्या रेषाखंडाच्या बिंदूखेरीज, चौकोनाचे इतर सर्व बिंदू असतात.

इतःपर आपण अशा बहिर्वक्र चौकोनांबाबतच चर्चा करणार असल्यामुळे दर वेळी बहिर्वक्र असा वेगळा शब्दप्रयोग आपण केला पाहिजेच असे नाही.

व्याख्येत सांगितलेल्या ज्या चार रेषाखंडांचा संयोग म्हणजे चौकोन असतो त्या रेषाखंडांना त्या चौकोनाच्या **भुजा** किंवा **बाजू** म्हणतात.

§ 9·17 प्रश्न :

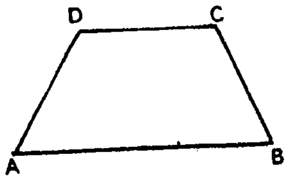
1. P, Q, R, S हे चार बिंदू एकप्रतलीय असून त्यांपैकी कोणतेही तीन बिंदू एकरेषीय नाहीत. आ. 9·30 पाहा. या बिंदूपासून बहिर्वक्र चौकोन मिळेल काय?
2. एकाच प्रतलातील चार बिंदूंपैकी एखादा जर उरलेल्या तिघांनी केलेल्या त्रिकोणाच्या अंतर्भागात असेल तर अशा चार बिंदूंपासून बहिर्वक्र चौकोन मिळू शकतो काय? मिळत असल्यास त्याची आकृती काढा.



आ. 9·30

§ 9·18 चौकोनांचे नामकरण, लेखन व वाचन :

काही विशिष्ट गुणधर्मांच्या चार रेषाखंडांच्या संयोगास आपण चौकोन म्हणतो. बाजूच्या आकृतीतील रेख AB, रेख BC, रेख CD व रेख AD या चार रेषाखंडांच्या संयोगाने चौकोन (बहिर्वक्र) ABCD मिळतो.



आ. 9·31

या चौकोनाच्या निर्मितीत A, B, C व D अशा चार अंत्यबिंदूंची आपल्याला गरज पडते. हे बिंदू जर आपण काही विशिष्ट क्रमाने लिहिले तर लागोपाठच्या बिंदूंच्या जोड्या (Pairs of Consecutive Points) निवडून, ह्या चौकोनाच्या बाजू असणारे चार रेषाखंड कोणते ते आपल्याला सहज ओळखता येते.

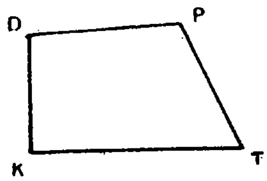
उदाहरणार्थ, बिंदूंचा क्रम ABCD घेतल्यास त्याच्या भुजा, रेख AB, रेख BC, रेख CD व रेख DA हे चार रेखाखंड आहेत हे चटकन ध्यानात येते.

पण हाच बिंदूंचा क्रम बदलवून ACBD असे लिहिल्यास मात्र या पद्धतीने रेख AC, रेख CB, रेख BD व रेख DA हे चार रेखाखंड मिळतात. पण ह्या काही आपल्या चौकोनाच्या भुजा नव्हेत.

तेव्हा चार बिंदूंनी चौकोनाचा निर्देश करताना त्या बिंदूंची नावे कोणत्याही क्रमाने लिहिलेली चालत नाहीत. ती नावे एका ठराविक क्रमाने लिहावी लागतात.

चौकोन PQRS चे नाव QRSP असेही देता येते. कारण दोन्ही नांवानुसार रेख QR, रेख RS, रेख SP व रेख PQ ह्याच चार भुजा मिळतात. चौकोनाकरता □ असे चिन्ह वापरतात.

§ 9·19 प्रश्न :



आ. 9·32

1. □ ABCD ची आणखी निदान चार नावे लिहा.
2. □ PNMK व □ MKPN हे एकच आहेत याची खात्री करून घ्या.
3. बाजूस दिलेल्या चौकोनाचे KDTP हे नाव योग्य आहे काय ? नसल्यास एक योग्य नाव लिहा.

§ 9·20 काही व्याख्या :

(A) **शिरोबिंदू** (Vertex)

चौकोनाचा निर्देश करताना जे चार बिंदू आपण वापरतो ते त्या चौकोनाचे शिरोबिंदू किंवा कोनबिंदू होत.

(B) **क्रमागत शिरोबिंदू** (Consecutive Vertices)

जर चौकोनाच्या दिलेल्या दोन शिरोबिंदूंना सांधणारा रेषाखंड हा त्या चौकोनाची एखादी भुजा असेल तर त्या दोन बिंदूंना क्रमागत शिरोबिंदू म्हणतात.

अर्थात कोणत्याही चौकोनात क्रमागत शिरोबिंदूंच्या अशा चार जोड्या असतात.

(C) **संमुख शिरोबिंदू** (Opposite Vertices)

चौकोनाचे कोणतेही दोन शिरोबिंदू जर क्रमागत नसतील तर त्यांना चौकोनाचे संमुख शिरोबिंदू म्हणतात.

प्रत्येक चौकोनात संमुख शिरोबिंदूंच्या अशा दोन जोड्या असतात.

(D) **कर्ण** (Diagonal)

चौकोनाच्या दोन संमुख शिरोबिंदूंना सांधणाऱ्या रेषाखंडास त्या चौकोनाचा कर्ण म्हणतात. प्रत्येक चौकोनास असे दोन कर्ण असतात.

(E) **क्रमागत किंवा संलग्न भुजा** (Consecutive or Adjacent Sides)

चौकोनाच्या ज्या दोन भुजांना समाईक अंत्यबिंदू असतो त्यांना क्रमागत किंवा संलग्न भुजा म्हणतात.

(F) **संमुख भुजा** (Opposite Sides)

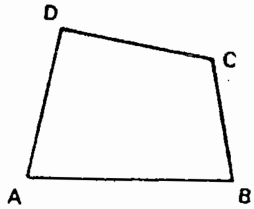
चौकोनाच्या ज्या दोन भुजा संलग्न नसतात त्यांना त्या चौकोनाच्या संमुख भुजा म्हणतात. अर्थातच चौकोनाच्या संमुख भुजांना समाईक अंत्यबिंदू नसतो. प्रत्येक चौकोनात संमुख भुजांच्या दोन जोड्या असतात.

(G) **चौकोनांचे कोन**

दिलेल्या □ ABCD चे

∠ ABC, ∠ BCD∠ CDA

आणि ∠ DAB हे चार कोन असतात.



आ. 9·33

(H) **क्रमागत कोन** (Consecutive Angles)

दिलेल्या चौकोनाच्या दोन कोनांनी त्या चौकोनाची एक भुजा समाविष्ट झाली असेल तर त्या कोनांना त्या चौकोनाचे क्रमागत कोन म्हणतात.

(I) **संमुख कोन** (Opposite Angles)

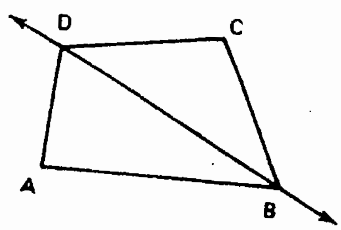
दिलेल्या चौकोनाचे दोन कोन जर क्रमागत नसतील तर त्यांना त्या चौकोनाचे संमुख कोन म्हणतात.

प्रत्येक चौकोनात संमुख कोनांच्या दोन जोड्या असतात.

§ 9·21 प्रश्न :

1. □ MNOP च्या (i) क्रमागत शिरोबिंदूंच्या जोड्या लिहा. (ii) भुजांची नावे लिहा.
2. □ LKDN च्या (i) क्रमागत भुजांच्या दोन जोड्या लिहा. (ii) संमुख कोनांच्या जोड्या लिहा. (iii) कर्णांची नावे लिहा.
3. रेख BX व रेख AY हे ज्याचे कर्ण आहेत अशा चौकोनाचे एक नाव लिहा. त्याच्या संमुख भुजांच्या जोड्या लिहा.

§ 9·22 चौकोनासंबंधी आपण आतापर्यंत जी माहिती पाहिली त्यावरून, चौकोनाच्या कर्णामुळे त्या चौकोनापासून दोन त्रिकोण मिळतात हे स्पष्ट होते. हे दोन त्रिकोण त्या कर्णरेषेच्या विरुद्ध अंगांस असतात. (चौकोनाचा तो कर्ण ही त्या दोन त्रिकोणांची समाईक भुजा असते व तिचे बिंदू अर्थातच कर्णरेषेच्या कोणत्याच **अंगास** असत नाहीत.)



आ. 9·34

चौकोनासंबंधी आणखी एक गोष्ट स्पष्ट होते ती ही की, त्याचा प्रत्येक शिरोबिंदू हा संमुखकोनाच्या अंतर्भागात असतो. (त्यामुळे मागील पृष्ठावर दाखवलेल्या □ ABCD च्या आकृती 9·33 मध्ये $m\angle ADC = m\angle ADB + m\angle BDC$ तसेच $m\angle ABC = m\angle ABD + m\angle DBC$ होईल.)

वरील दोन्ही निष्कर्ष प्रमेय म्हणून सिद्ध होऊ शकतात. त्यांची सिद्धता न देता केवळ त्या प्रमेयांची विधाने खाली दिली आहेत.

§ 9·23 ▪ **प्रमेय 1 :**

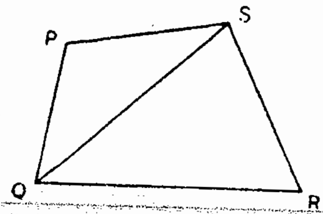
चौकोनाचा प्रत्येक कर्ण त्या चौकोनाचे दोन त्रिकोणांत विभाजन करतो.

§ 9·24 ▪ **प्रमेय 2 :**

चौकोनाचा प्रत्येक शिरोबिंदू हा त्याच्या संमुख कोनाच्या अंतर्भागात असतो.

या दोन प्रमेयांच्या उपयोगाने चौकोनाच्या कोनांच्या मापांच्या बेरजेसंबंधी पुढील प्रमेय सिद्ध करता येते.

§ 9·25 ▪ **प्रमेय 3 : चौकोनाच्या चारही कोनांच्या मापांची बेरीज 360 असते.**



आ. 9·35

बाजूस दाखवल्याप्रमाणे □ PQRS हा एक चौकोन दिला आहे. रेख QS हा त्याचा कर्ण आहे. हा कर्ण □ PQRS चे △ PQS व △ QRS या दोन त्रिकोणांत विभाजन करतो.

△ PQS बाबत

$m\angle PQS + m\angle QSP + m\angle SPQ = 180$

△ QRS बाबत

$m\angle QRS + m\angle RSQ + m\angle SQR = 180$

त्यामुळे;

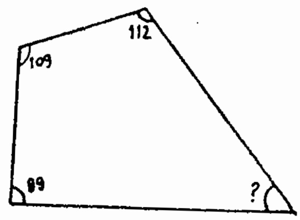
$(m\angle PQS + m\angle RQS) + (m\angle PSQ + m\angle QSR)$
$+ m\angle SPQ + m\angle QRS = 180 + 180$
$= 360.$

पण $m\angle PQS + m\angle RQS = m\angle PQR$

आणि $m\angle PSQ + m\angle QSR = m\angle PSR.$

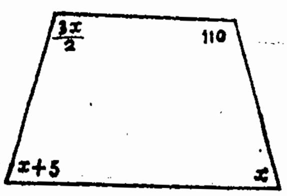
म्हणून $m\angle PQR + m\angle PSR + m\angle SPQ + m\angle QRS$
$= 360$

§ 9·26 **प्रश्न :**



आ. 9·36

1. आ. 9·36 मधील प्रश्नचिन्हांकित कोनाचे माप ओळखा.



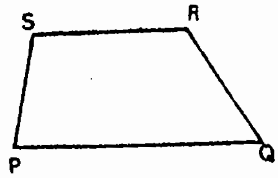
आ. 9·37

2. बाजूच्या आ. 9·37 मधील x ची किंमत ओळखा.
3. □ TRQP चा कर्ण TQ त्या चौकोनास कोणत्या दोन त्रिकोणांत विभागतो ?

§ 9·27 **चौकोनांचे प्रकार :**

(A) **समलंब चौकोन** (Trapezoid, Trapezium)

दिलेल्या चौकोनाच्या संमुख भुजांची एक व एकच जोडी समांतर असेल तर त्या चौकोनाला समलंब चौकोन म्हणतात.



आ. 9·38

'भुजांची जोडी समांतर आहे' असे जेव्हा आपण म्हणतो तेव्हा त्या जोडीतील दोन भुजा परस्परांस समांतर आहेत असे आपल्याला म्हणायचे असते. तसेच, 'भुजांच्या दोन जोडया समांतर आहेत' असे जेव्हा आपण म्हणतो तेव्हा त्याचा अर्थ एका जोडीतील दोन भुजा परस्परांस समांतर आणि दुसऱ्या जोडीतील दोन भुजा परस्परांस समांतर आहेत असा होतो.

कोणत्याही समलंब चौकोनाचा पूर्णपणे निर्देश करताना त्याचे केवळ नाव लिहून चालत नाही तर संमुख भुजांची कोणती जोडी समांतर आहे ते लिहावे लागते.

उदाहरणार्थ, □ PQRS हा समलंब चौकोन आहे. त्यात रेख PQ ∥ रेख RS आहे.

अर्थात अशा वेळी रेखPS, रेखQR ला समांतर नाही हे उघड आहे. समलंब चौकोनाच्या समांतर भुजांपैकी प्रत्येकीस त्या चौकोनाचा पाया म्हणतात व असमांतर भुजांपैकी प्रत्येकीस तिर्यक्भुजा म्हणतात.

समलंब चौकोनाच्या दोन्ही पायांची लांबी समान ठेवता येते काय ? ते वेगवेगळ्या आकृत्या काढून तपासा.

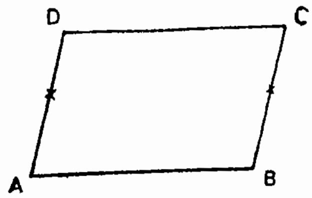
(B) **समांतरभुज चौकोन** (Parallelogram)

दिलेल्या चौकोनाच्या संमुख भुजांच्या दोन्ही जोडया समांतर असतील तर त्या चौकोनाला समांतरभुज चौकोन म्हणतात.

□ ABCD हा समांतरभुज आहे याचा अर्थ, त्याच्या संमुख भुजांच्या दोन्ही जोडया समांतर आहेत.

म्हणजे रेखAB ∥ रेखCD

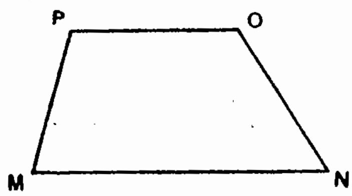
आणि रेखBC ∥ रेखAD.



आ. 9·39

समांतरभुज चौकोनाचा पूर्ण निर्देश करण्यासाठी त्याचे फक्त नाव दिले म्हणजे पुरे असते. (अर्थात तो समांतरभुज चौकोन आहे हे सांगितलेच पाहिजे.)

प्रश्न : 1. बाजूस दिलेला □ MNOP हा समलंब चौकोन, एक समांतरभुज चौकोन आणि एक त्रिकोण यांचा संयोग (union) आहे असे आपण दाखवू शकू काय ? दिलेल्या आकृतीत रेख MN ∥ रेख OP आहे.

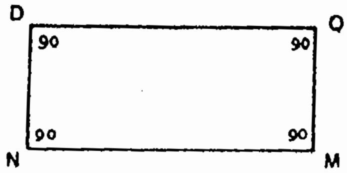


आ. 9·40

2. प्रश्न 1 मध्ये दिलेला समलंब चौकोन आणि एखादा त्रिकोण यांच्या संयोगाने एखादा समांतरभुज चौकोन मिळवता येईल काय ? तसे शक्य असल्यास, तो त्रिकोण आकृती काढून दाखवा.

(C) **काटकोन चौकोन** (Rectangle)

दिलेल्या चौकोनाचा प्रत्येक कोन जर काटकोन असेल तर त्या चौकोनास काटकोन चौकोन किंवा आयत म्हणतात.



आ. 9·41

□NMQD हा काटकोन चौकोन आहे असे म्हटले म्हणजे,

$m \angle M = 90$

$m \angle N = 90$

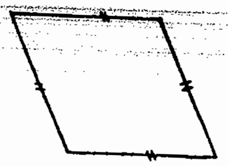
$m \angle Q = 90$

व $m \angle D = 90$ हे ओघानेच आले.

1. ज्या चौकोनाचे तीन कोन प्रत्येकी काटकोन आहेत तो काटकोन चौकोन आहे हे दाखवा.
2. काटकोन चौकोनाच्या संमुख भुजा समांतर असतात हे सिद्ध करा.
3. प्रत्येक काटकोन चौकोन हा समांतरभुज असलाच पाहिजे काय ?
4. समांतरभुज चौकोनाचा एक कोन काटकोन असला म्हणजे तो काटकोन चौकोन असतो. हे सिद्ध करा.

(D) **समभुज चौकोन** (Rhombus)

ज्या समांतरभुज चौकोनाच्या सर्व भुजा एकरूप असतात त्या चौकोनाला समभुज चौकोन असे म्हणतात.



आ. 9·42

□ABCD हा समभुज चौकोन आहे असे म्हटले म्हणजे त्याचा अर्थ

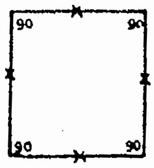
(i) तो समांतरभुज चौकोन आहे

व (ii) त्याच्या सर्व भुजा एकरूप आहेत

असा होतो.

(E) **चौरस** (Square)

ज्या काटकोन चौकोनाच्या सर्व भुजा एकरूप असतात त्या चौकोनाला चौरस असे म्हणतात.

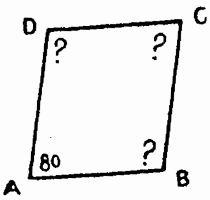


आ. 9·43

§ 9·28 **प्रश्न :**

1. योग्य शब्द ठेवून खालील वाक्ये पूर्ण करा.

(1) प्रत्येक चौरस समभुज चौकोन $\frac{\text{असतो.}}{\text{नसतो.}}$



आ. 9·44

(2) समभुज चौकोनाचा एक कोन काटकोन असल्यास तो चौकोन चौरस $\frac{\text{असतो.}}{\text{नसतो.}}$

2. बाजूच्या आकृतीत दाखवलेल्या समभुज चौकोनाच्या प्रश्नचिन्हांकित कोनांची मापे ओळखा.

3 आ. 9·44 वरून $m \angle DCA$ ओळखा.

§ **9·29 : चौकोनाच्या कोनांच्या मापांची बेरीज 360 असते हे प्रमेय व त्यानंतर चौकोनाच्या भुजा** व कोन यांवरून चौकोनांचे विविध प्रकार आपण पाहिले. त्यांच्या इतर गुणधर्मांचा विचार आता आपल्याला करायचा आहे. प्रथम आपण समांतरभुज चौकोनांच्या गुणधर्मांचा अभ्यास करू.

आठव्या इयत्तेतील अभ्यासात, आपल्या हे अनुभवास आले होते की,

1) समांतरभुज चौकोनाच्या संमुख भुजा एकरूप असतात.

2) समांतरभुज चौकोनाचे संमुख कोन एकरूप असतात.

3) समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांस दुभागतात.

ही सर्व प्रमेयेच आहेत. पण त्यांच्या सिद्धता अलग अलग न देता यांच्या मुळाशी जे प्रमेय आहे त्याची सिद्धता आपण पाहू. त्यावरून किंवा अन्यथाही या प्रमेयांच्या सिद्धता तुम्हांला सहज लिहिता येतील.

ते मूलभूत प्रमेय असे —

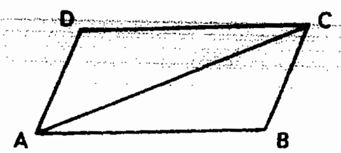
§ **9·30 ▪ प्रमेय :**

समांतरभुज चौकोनाचा प्रत्येक कर्ण त्या चौकोनास दोन एकरूप त्रिकोणांत विभागतो.

पक्ष : □ ABCD हा एक समांतरभुज चौकोन आहे.

साध्य : 1) △ ABC ≅ △ CDA

2) △ ABD ≅ △ CDB



आ. 9·45

सिद्धता : चौकोनाच्या कर्णांच्या गुणधर्मानुसार रेख AC या कर्णाने □ ABCD चे △ ABC व △ ADC या दोन त्रिकोणांत विभाजन होते.

या दोन त्रिकोणांत रेख AC समाईक आहे.

∠ BAC ≅ ∠ DCA ······ (रेख AB ∥ रेख CD म्हणून होणारे व्युत्क्रम कोन)

व ∠ BCA ≅ ∠ DAC ······ (रेख BC ∥ रेख AD म्हणून होणारे व्युत्क्रम कोन)

∴ कोबाको गृहीतकानुसार, △ ABC ≅ △ CDA.

याच पद्धतीने कर्ण BD ने होणारे △ ABD व △ DBC हेही एकरूप आहेत हे सिद्ध करता येते. अर्थात △ ABD ≅ △ DBC.

§ **9·31 :** वर सिद्ध केलेल्या △ ACB ≅ △ CAD या एकरूपतेमुळे,

(i) रेख AB ≅ रेख CD

(ii) रेख CB ≅ रेख AD

(iii) ∠ ABC ≅ ∠ CDA हे सिद्ध होते.

आणि △ ABD ≅ △ CDB मुळे

(vi) ∠ BAD ≅ ∠ DCB हे सिद्ध होते.

म्हणजे, **समांतरभुज चौकोनाच्या संमुख भुजा एकरूप असतात व संमुख कोन एकरूप असतात** हे सिद्ध झाले.

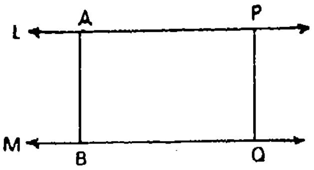
§ 9·32 व्याख्या :

दोन समांतर रेषांपैकी एकीवरील कोणत्याही एका बिंदूपासून, दुसऱ्या रेषेपर्यंत काढलेल्या लंबरेषाखंडाच्या लांबीस, त्या दोन समांतर **रेषांमधील** (त्या ठिकाणचे) **अंतर** म्हणतात.

§ 9·33 ▪ प्रमेय :

दोन समांतर रेषांमधील अंतर सर्व ठिकाणी सारखे असते.

(म्हणजे समांतर रेषा समानांतर असतात.)



आ. 9·46

समजा, L आणि M ह्या दोन समांतर रेषा आहेत. रेषा L वर A आणि P हे दोन वेगवेगळे बिंदू आहेत, रेख AB ⊥ रेषा M आणि रेख PQ ⊥ रेषा M व अनुक्रमे B व Q हे या लंबांचे पाद (foot) आहेत.

एकाच प्रतलामध्ये रेख AB व रेख PQ हे दोन्ही रेषा M ला लंब आहेत.

∴ रेख AB ∥ रेख PQ

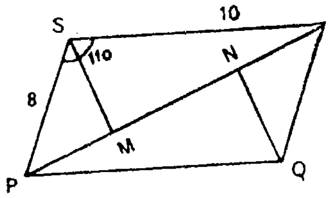
रेख BQ ∥ रेख AP आहेच.

त्यामुळे □ BQPA हा समांतरभुज चौकोन होतो.

∴ रेख AB ≅ रेख PQ

म्हणजेच, l (AB) = l (PQ)

§ 9·34 प्रश्न :

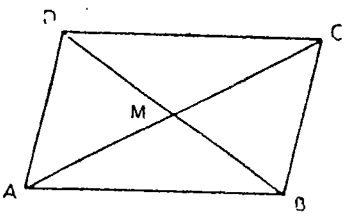


आ. 9·47

1. PQRS या समांतरभुज चौकोनात
   (i) l (PS) = 8; तर l (RQ) = ?
   (ii) l (SR) = 10; तर l (PQ) = ?
   (iii) $m\angle$ PSR = 110 असेल तर
   $m\angle$ PQR = ?
   $m\angle$ SPQ = ?
   $m\angle$ SRQ = ?
   (iv) रेख SM ⊥ रेख PR व रेख QN ⊥ रेख PR तर l (SM) = l (NQ) हे सिद्ध करा.
2. □ ABCD या समांतरभुज चौकोनाच्या क्रमागत कोनाच्या मापांत 10 चा फरक आहे. तर त्याच्या चारही कोनांची मापे ठरवा.

§ 9·35 ▪ प्रमेय :

समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांस दुभागतात.



आ. 9·48

पक्ष : □ ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे. रेखAC व रेखBD यांचा छेदनबिंदू M आहे.

साध्य : रेख AC व रेख BD परस्परांस दुभागतात.

सिद्धता : △ DMC व △ BMA यांत

रेख DC ≅ रेख BA ......(समांतरभुज चौकोनाच्या संमुख भुजा)

∠ MDC ≅ ∠ MBA }
∠ MCD ≅ ∠ MAB } (रेख AB ∥ रेख DC यामुळे होणारे व्युत्क्रम कोन)

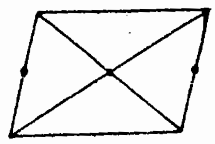
∴ △ DMC ≅ △ BMA ......(कोबाको)

त्यामुळे रेख DM ≅ रेख BM

व रेख MC ≅ रेख MA

म्हणजे M हा कर्ण AC व कर्ण BD चा मध्यबिंदू आहे.

प्रश्न : समांतरभुज चौकोनाच्या कर्णांचा छेदनबिंदू हा त्या चौकोनाच्या संमुख भुजांच्या एका जोडीतील भुजांच्या मध्यबिंदूशी एकरेषीय असतो हे सिद्ध करा.



आ. 9·49

§ 9·36 ▪ **प्रमेय :**

समांतरभुज चौकोनाचे क्रमागत कोन एकमेकांचे पूरक कोन असतात.

हे प्रमेय तुम्ही सिद्ध करा.

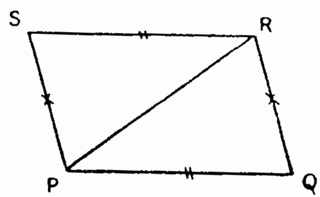
§ 9·37 आतापर्यंत आपण समांतरभुज चौकोनाच्या गुणधर्मांची काही प्रमेये पाहिली. आता आपण चौकोनाच्या कोणत्या गुणधर्मांमुळे तो चौकोन समांतरभुज चौकोन होतो हे पाहाणार आहोत. असे मूलभूत गुणधर्म म्हणजे एका दृष्टीने, समांतरभुज चौकोनाची 'लक्षणे'च होत. त्यामुळे अशा प्रकारच्या प्रमेयांना आपण समांतरभुज चौकोनाची 'लक्षणप्रमेये' म्हणू. या प्रमेयांची भाषा पुढीलप्रमाणे असेल :—

'दिलेल्या चौकोनात जर......(अमुक अमुक) हा गुणधर्म असेल तर तो चौकोन समांतरभुज चौकोन असतो.'

आतापर्यंत आपल्याला समांतरभुज चौकोनाचे एकच लक्षण माहीत आहे; ते म्हणजे 'चौकोनाच्या संमुख भुजांच्या दोन्ही जोड्या समांतर असल्यास दिलेला चौकोन समांतरभुज चौकोन असतो.' पुढील प्रत्येक प्रमेयात, चौकोनाच्या दिलेल्या गुणधर्मावरून त्याच्या संमुख भुजांच्या दोन्ही जोड्या समांतर होतात हे सिद्ध केले आहे.

§ 9·38 ▪ **प्रमेय :**

दिलेल्या चौकोनाच्या संमुख भुजांच्या दोन्ही जोड्या जर एकरूप असतील तर तो चौकोन समांतरभुज चौकोन असतो.



पक्ष : □ PQRS मध्ये

रेख PS ≅ रेख QR

आणि रेख PQ ≅ रेख RS

साध्य : □ PQRS हा समांतरभुज चौकोन आहे.

आ. 9·50

सिद्धता : चौकोनाच्या कर्णाच्या गुणधर्मानुसार

(i) कर्ण PR मुळे, □ PQRS चे △ PQR व △ PSR या दोन त्रिकोणांत विभाजन होते.

या दोन त्रिकोणांबाबत,

रेख PR दोघांना समाईक आहे.

रेख QR ≅ रेख PS
व रेख PQ ≅ रेख RS } ......(पक्ष)

म्हणून △ PQR ≅ △ PSR ......(बाबाबा)

(ii) भाग (i) मध्ये सिद्ध केलेल्या एकरूप त्रिकोणांवरून

∠ PRQ ≅ ∠ RPS

आणि ∠ RPQ ≅ ∠ PRS

आता ∠ PRQ व ∠ RPS म्हणजे रेषा QR व रेषा PS यांना रेषा PR ने छेदल्यामुळे झालेले व्युत्क्रम कोन आहेत.

त्यामुळे रेषा QR ∥ रेषा PS

तसेच ∠ RPQ ≅ ∠ PRS असल्यामुळे रेषा PQ ∥ रेषा RS

(iii) भाग (ii) मध्ये सिद्ध केल्याप्रमाणे

रेख QR ∥ रेख PS व

रेख PQ ∥ रेख RS

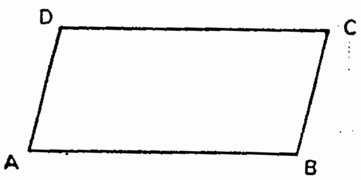
∴ □ PQRS हा समांतरभुज चौकोन आहे.

§ 9·39 एखादा चौकोन जर समांतरभुज चौकोन आहे हे सिद्ध करावयाचे असेल तर संमुख भुजांच्या दोन्ही जोड्या समांतर आहेत हे सिद्ध केलेच पाहिजे असे नाही. त्या चौकोनाच्या संमुख भुजा समांतर व एकरूप आहेत हे सिद्ध केले तरीही काम भागते.

अशीच आणखी काही 'लक्षणे' खालील प्रमेयांत दिली आहेत. त्यांच्या सिद्धता लिहा.

§ 9·40 ▪ **प्रमेय :**

दिलेल्या चौकोनाच्या संमुख भुजांची एक जोडी समांतर असून एकरूपही असेल तर तो चौकोन समांतरभुज चौकोन असतो.



आ. 9·51

स्पष्टीकरण : □ ABCD मध्ये

रेख AD ∥ रेख BC व

रेख AD ≅ रेख BC असेल तर

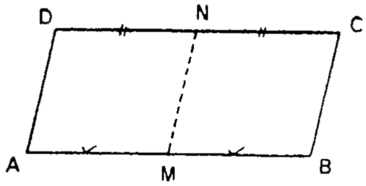
□ ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे हे सिद्ध करावयाचे आहे.

§ 9·41 ■ **प्रमेय :**

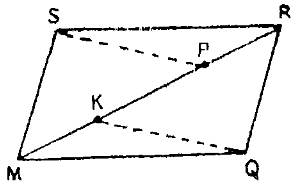
दिलेल्या चौकोनाचे दोन्ही कर्ण जर परस्परांस दुभागत असतील तर तो चौकोन समांतरभुज चौकोन असतो.

§ 9·42 **प्रश्न :**

1. □ABCD हा समांतरभुज चौकोन असून त्याच्या रेख AB व रेख DC या भुजांचे अनुक्रमे M व N हे मध्यबिंदू आहेत.
सिद्ध करा.
(i) □AMND हा समांतरभुज चौकोन आहे.
(ii) रेख AN ≅ रेख MC.



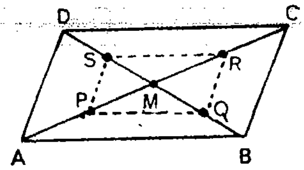
आ. 9·52



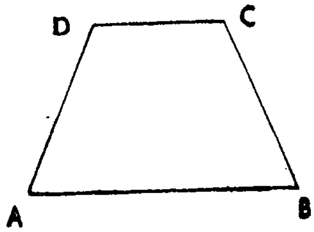
आ. 9·53

2. बाजूच्या आकृतीत □MQRS हा समांतरभुज चौकोन असून रेख MR मध्ये K व P हे असे बिंदू आहेत की, l (MK) = l (RP) तर सिद्ध करा की, रेख SP ∥ रेख KQ.

3. □ABCD हा समांतरभुज चौकोन असून त्याच्या कर्णांचा छेदनबिंदू M आहे. रेख MA, रेख MB, रेख MC व रेख MD यांचे अनुक्रमे P, Q, R, व S हे मध्यबिंदू आहेत. तर सिद्ध करा की □PQRS हा समांतरभुज चौकोन आहे.



आ. 9·54

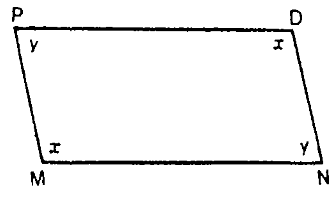


आ. 9·55

4. समजा, समलंब चौकोन ABCD मध्ये l (AB) = 2 l (DC) आहे. रेख AB ∥ रेख DC आहे. सिद्ध करा की, रेषा AD व रेषा BC यांचा छेदनबिंदू M असल्यास D हा रेख AM चा मध्यबिंदू होतो आणि C हा रेख BM चा मध्यबिंदू होतो. (आकृती पूर्ण करून सिद्धता लिहा.)

§ 9·43 ■ **प्रमेय :**

दिलेल्या चौकोनाच्या संमुख कोनांच्या दोन्ही जोडया जर एकरूप असतील तर तो चौकोन समांतरभुज चौकोन असतो.



आ. 9·56

पक्ष : □MNDP मध्ये
∠M ≅ ∠D
व ∠N ≅ ∠P

साध्य : □MNDP हा समांतरभुज चौकोन आहे.

सिद्धता :

(i) समजा $\angle$ M चे माप x आहे आणि $\angle$ N चे माप y आहे.
पक्षानुसार, $\angle M \cong \angle D$ व $\angle N \cong \angle P$ आहे.
तेव्हा $m \angle D = x$ होईल व $m \angle P = y$ होईल.

(ii) चौकोनाच्या कोनांच्या मापाच्या बेरजेच्या प्रमेयानुसार
$m \angle M + m \angle N + m \angle D + m \angle P = 360$
म्हणजे आता भाग (i) वरून
$x + y + x + y = 360$ होते.
$\therefore 2x + 2y - 360$
$\therefore x + y = 180.$

(iii) भाग (i) व (ii) वरून,
$m \angle PMN + m \angle MND = 180$
व $m \angle PDN + m \angle MND = 180$

(iv) $\angle$ PMN व $\angle$ MND हे, रेषा PM व रेषा ND यांना रेषा MN ने छेदल्यामुळे तिच्या एकाच अंगास झालेले आंतर कोन आहेत. भाग (iii) नुसार ते परस्परांचे पूरक कोन आहेत.
$\therefore$ रेषा PM $\parallel$ रेषा ND.
याचप्रमाणे $m \angle PDN + m \angle MND = 180$ असल्यामुळे रेषा MN $\parallel$ रेषा PD होते.
$\therefore$ □ MNDP हा समांतरभुज चौकोन आहे.

§ 9·44 **प्रश्न :**

1. □ ABCD च्या कर्णांचा छेदनबिंदू P आहे. पुढीलपैकी कोणकोणती माहिती हा चौकोन समांतरभुज चौकोन ठरवण्यास पुरेशी आहे?
   (i) रेख AB $\parallel$ रेख CD, रेख AD $\cong$ रेख BC
   (ii) $l(AB) = 5$, $l(BC) = 7$, $l(CD) = 5$, $l(AD) = 7$
   (iii) $m \angle DAB = 70$, $m \angle ABC = 110$, $m \angle BCD = 70$
   (iv) $l(AP) = 3$, $l(BP) = 4$, $l(CP) = 3$, $l(DP) = 4$
2. काटकोन चौकोन हा समांतरभुज चौकोन असतो हे सिद्ध करा.
3. प्रत्येक समभुज चौकोन हा समांतरभुज चौकोन असतो, हे कोणत्या प्रमेयावरून म्हणता येते?
4. समभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांस काटकोन करून दुभागतात हे सिद्ध करा.
5. दिलेल्या चौकोनाचे कर्ण परस्परांस दुभागतात याशिवाय आणखी कोणती माहिती दिली असता तो चौकोन समभुज आहे हे सिद्ध होते?
6. रिकाम्या जागी योग्य शब्द भरा :
   चौरसाचे कर्ण परस्पर, (i) ________ असतात, (ii) ________ असतात व (iii) ________ दुभाजक असतात.

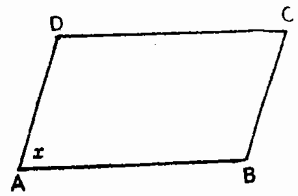
7. रेषाखंड व त्यांची स्थानांतरण प्रतिमा (translation image) यांच्या टोकांनी होणारा चौकोन समांतरभुज होतो काय? कोणत्या प्रमेयाच्या आधारे?

8. समभुज चौकोनाच्या एका कर्णाची दुसऱ्या कर्णात परावर्तन प्रतिमा म्हणजे तोच पहिला कर्ण असतो हे खरे काय?

9. बाजूस दिलेली आकृती □ ABCD ही समांतरभुज चौकोनाची आहे.

रेख AD चे A बिंदूभोवती व रेख BC चे B बिंदूभोवती समान भ्रमण केल्यानंतर त्यांच्या प्रतिमा रेख AD′ व रेख BC′ आहेत.

सिद्ध करा की, □ ABC′D′ हा समांतरभुज चौकोन होतो.



आ. 9·57

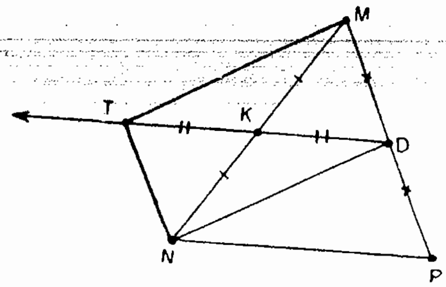
§ 9·45 ▪ **त्रिकोणाच्या बाजूंच्या मध्यबिंदूंचे प्रमेय :**

त्रिकोणाच्या दोन बाजूंचे मध्यबिंदू सांधणारा रेषाखंड, त्या त्रिकोणाच्या उरलेल्या बाजूस समांतर असतो व तिच्या निम्म्या लांबीचा असतो.

पक्ष : △ MNP च्या बाजू MN चा मध्यबिंदू K आहे व बाजू MP चा मध्यबिंदू D आहे.

साध्य : (i) रेख KD ∥ रेख NP व

(ii) $l(KD) = \frac{1}{2} l(NP)$



आ. 9·58

सिद्धता :

1. किरण KD च्या विरुद्ध किरणावर T बिंदू असा घ्या की $l(KT) = l(KD)$.

2. □ TNDM चे कर्ण MN व TD परस्परांस दुभागत आहेत.

∴ □ TNDM हा समांतरभुज चौकोन आहे.

∴ रेख TN ∥ रेख MD आहे व रेख TN ≅ रेख MD आहे.

3. पक्षानुसार, रेख MD ≅ रेख DP आहे.

आणि रेख TN ≅ रेख MD (सिद्ध)

म्हणून, रेख TN ≅ रेख DP होते.

4. □ NPDT मध्ये रेख TN ∥ रेख DP ·········(भाग 2)

व रेख TN ≅ रेख DP ·········(भाग 3)

∴ □ NPDT हा समांतरभुज चौकोन आहे.

∴ रेख TD ∥ रेख NP आणि $l(TD) = l(NP)$.

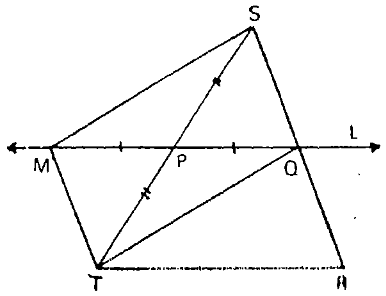
म्हणजेच रेख KD ∥ रेख NP आणि $l(KD) = \frac{1}{2} l(NP)$

§ 9·46 ■ प्रमेय :

त्रिकोणाच्या एका बाजूच्या मध्यबिंदूतून जाणारी व त्याच्या दुसऱ्या बाजूस समांतर असणारी रेषा त्या त्रिकोणाच्या उरलेल्या बाजूस दुभागते.

पक्ष : △ STR च्या बाजू ST चा P हा मध्यबिंदू आहे. P बिंदूतून जाणारी L ही रेषा, रेख TR ला समांतर आहे.
रेषा L रेख SR ला Q या बिंदूत छेदते:

साध्य : Q हा रेख SR चा मध्यबिंदू आहे.

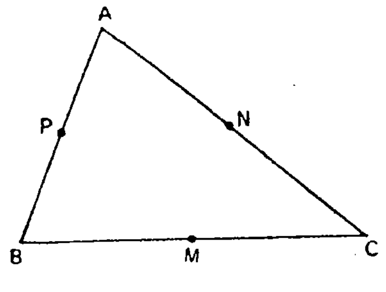


आ. 9·59

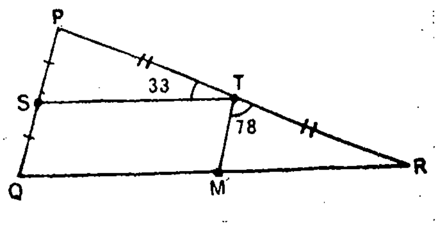
सिद्धता :

1. किरण PQ च्या विरुद्ध किरणावर, M हा बिंदू असा घ्या की, $l(PQ) = l(MP)$.
2. □ TQSM चे कर्ण ST व कर्ण MQ हे परस्परांस P बिंदूत दुभागतात.
   ∴ □ TQSM हा समांतरभुज चौकोन आहे.
   ∴ रेख TM ∥ रेख QS आहे व रेख TM ≅ रेख QS आहे.
3. रेख MQ ∥ रेख TR व ....(पक्ष)
   रेख TM ∥ रेख QR ....(भाग 2)
   त्यामुळे, □ TRQM हा समांतरभुज चौकोन आहे.
   ∴ रेख TM ≅ रेख QR
   आता (2) व (3) यावरून, रेख QS ≅ रेख QR
   ∴ Q हा रेख SR चा मध्यबिंदू आहे.

§ 9·47 प्रश्न :

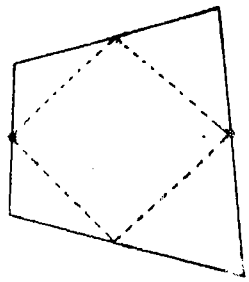


आ. 9·60



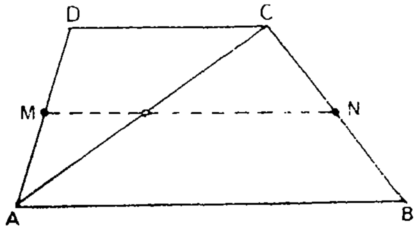
आ. 9·61

1. △ ABC च्या रेखAB, रेखBC व रेखAC ह्या बाजूंचे अनुक्रमे P, M व N हे मध्यबिंदू आहेत. (आ. 9·60 पाहा)
   $l(AB) = 7$
   $l(BC) = 10$
   $l(AC) = 9$ असल्यास △ MNP च्या बाजूंच्या लांबी ठरवा.
2. प्रश्न 1 मध्ये △ ABC हा समभुज त्रिकोण असल्यास △ MNP सुद्धा समभुज त्रिकोण असतो हे सिद्ध करा.
3. बाजूच्या आकृतीत (आ. 9·61) दाखवलेल्या माहितीवरून
   $m\angle TMR$, $m\angle PST$ व $m\angle SQM$
   यांच्या किमती ठरवा.



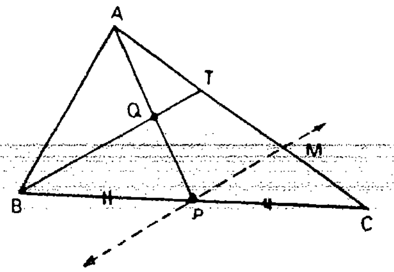
आ. 9·62

4. कोणत्याही चौकोनाच्या भुजांचे मध्यबिंदू क्रमाने सांधून होणारा चौकोन समांतरभुज असतो हे सिद्ध करा.



आ. 9.63

बाजूच्या आकृतीत दाखवलेल्या चौकोनात,
रेख AB || रेख DC.
रेख AD चा मध्यबिंदू M हा आहे.
रेख BC चा मध्यबिंदू N आहे, तर सिद्ध करा की, रेषा MN, रेख AC ला दुभागते.



आ. 9·64

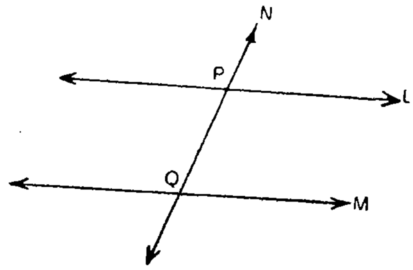
6. △ ABC च्या रेख BC या भुजेचा P हा मध्यबिंदू आहे. रेख AP चा मध्यबिंदू Q आहे. आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे, रेषा BQ रेषा AC ला T या बिंदूत छेदते. सिद्ध करा की $l(AT) = \frac{1}{3} l(AC)$

सूचना : P बिंदूतून जाणारी व रेषा BT ला समांतर असणारी एक रेषा काढा. समजा की ती रेषा रेख TC ला M या बिंदूत छेदते.

9·48 एकप्रतलीय तीन समांतर रेषा :

मागे प्रकरण 8 मध्ये दोन समांतर रेषा व त्यांची छेदिका, यांविषयी माहिती आपण पाहिली आहे. (छेदिकेची व्याख्या आठवा.)

त्यांचे आणखी काही गुणधर्म आता आपल्याला अभ्यासायचे आहेत. त्यासाठी पुढील व्याख्या आवश्यक आहे.



आ. 9·65

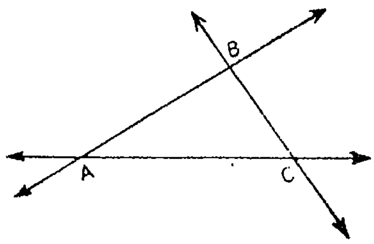
व्याख्या :

जर L आणि M या दोन रेषांना N ही छेदिका अनुक्रमे P व Q बिंदूत छेदत असेल तर **रेख** PQ हा L आणि M रेषांनी N छेदिकेवर कापलेला **आंतरछेद** (Intercept) आहे असे म्हणतात.

(L आणि M रेषा समांतर असल्या पाहिजेत असे या व्याख्येत म्हटले नाही हे लक्षात घ्या.)

§ 9·49 प्रश्न :

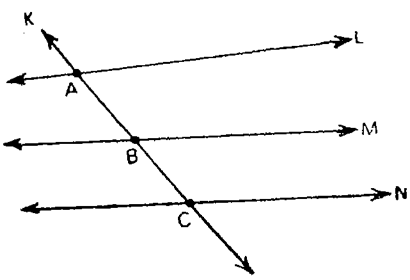
1. बाजूस दिलेल्या आकृतीत रेषा AB व रेषा AC यांनी रेषा BC वर कापलेला आंतरछेद कोणता हे सांगा.
2. दिलेल्या तीन रेषांपैकी प्रत्येकीवर इतर दोन रेषा एकेक आंतरछेद कापीत असतील तर अशा आंतरछेदांच्या संयोगास काय म्हणता येईल ?
3. प्रश्न 1 मध्ये रेषा AB व रेषा BC यांनी रेषा AC वर कापलेला आंतरछेद कोणता ते सांगा.



आ. 9·66

§ 9·50 आ. 9·67 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे L, M आणि N ह्या तीन रेषांना K ही छेदिका अनुक्रमे A, B व C या छेदनबिंदूंत छेदते, असे समजा.

L, M व N मधून दोन-दोन रेषांच्या तीन जोडया होतात. L व M यांनी K वर रेख AB हा आंतरछेद कापला असून M व N यांनी K रेषेवर रेख BC हा आंतरछेद कापला आहे.



आ. 9·67

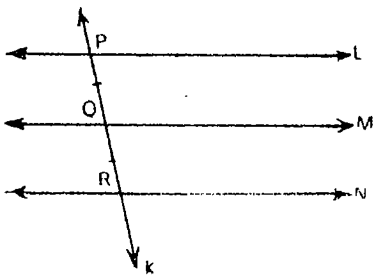
§ 9·51 प्रश्न :

1. आ. 9·67 मध्ये L व N यांनी K वर कापलेला आंतरछेद सांगा.
2. चार भिन्न रेषांना K ही छेदिका (चार भिन्न बिंदूत) छेदते. तर एकूण किती आंतरछेद त्या छेदिकेवर कापले जातील ?
   यांपैकी कोणताही एक आंतरछेद दुसऱ्याचा उपसंच राहू नये असे ठरल्यास किती आंतरछेद सांगता येतील ?

§ 9·52 एकाच छेदिकेवर एकापेक्षा अधिक आंतरछेद कापले जाऊ शकतात हे आपण पाहिले.

बाजूच्या आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे जर $l(PQ) = l(QR)$ असेल तर L, M व N ह्या रेषा K छेदिकेवर एकरूप आंतरछेद कापतात असे आपण म्हणू.

याविषयी आपण एक प्रमेय पाहू.



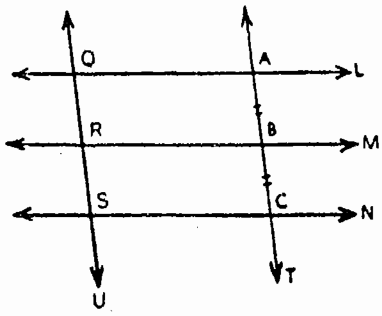
आ. 9·68

§ 9·53 ▪ प्रमेय :

जर तीन समांतर रेषा एका छेदिकेवर एकरूप आंतरछेद कापत असतील तर त्या तीन रेषा पहिल्या छेदिकेला समांतर असणाऱ्या दुसऱ्या कोणत्याही छेदिकेवर एकरूप आंतरछेद कापतात.

(दोन समांतर छेदिकांपैकी एकीवर एकरूप आंतरछेद कापणाऱ्या तीन समांतर रेषा त्या दुसऱ्या छेदिकेवरही एकरूप आंतरछेद कापतात.)

पक्ष : L ∥ M ∥ N ह्या तीन रेषा T या एका छेदिकेला अनुक्रमे A, B व C बिंदूत छेदतात.
रेख AB ≅ रेख BC
U ही T ला समांतर असणारी एक छेदिका L, M व N या रेषांना अनुक्रमे Q, R व S बिंदूंमध्ये छेदते.



आ. 9·69

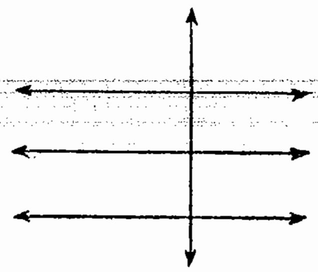
साध्य : रेख QR ≅ रेख RS

सिद्धता : पक्षानुसार, □RBAQ व □SCBR हे दोन्हीही समांतरभुज चौकोन आहेत.
त्यामुळे □RBAQ मध्ये, रेख AB ≅ रेख QR
व □SCBR मध्ये, रेख BC ≅ रेख RS होते.
पण रेख AB ≅ BC असे पक्षात दिले आहे.
∴ रेख QR ≅ रेख RS.

§ 9·54 **प्रश्न :**

1. तीन समांतर रेषांना लंबरूपाने छेदणाऱ्या एका छेदिकेवर त्या समांतर रेषांनी जर एकरूप आंतरछेद कापले असतील तर त्या छेदिकेपुरत्या त्या रेषा समान अंतरावरच्या (equally spaced) आहेत असे आपण म्हणू.

   तीन समांतर रेषा एका छेदिकेपुरत्या समान अंतरावरच्या असल्यास दुसऱ्या कोणत्याही छेदिकेसाठी त्या तशा असतील काय ?

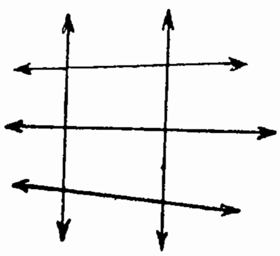

आ. 9·70

2. L_1, L_2... Ln ह्या परस्पर समांतर रेषा समान अंतरावरच्या आहेत. यांच्या संचास आपण X नाव देऊ.

   T_1, T_2... Tm ह्या परस्पर समांतर रेषा आहेत. त्यांच्या संचास आपण Y म्हणू.

   X या संचातील रेषा, Y या संचातील प्रत्येक रेषेवर एकरूप आंतरछेद कापतील काय ?

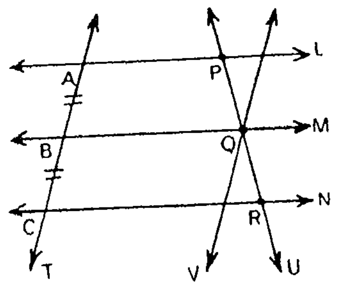
3. दोन समांतर छेदिकांपैकी प्रत्येकीवर एकरूप आंतरछेद करणाऱ्या तीन रेषा नेहमीच समांतर असतात काय ?


आ. 9·71

§ 9·55 ▪ **प्रमेय :**

तीन समांतर रेषा जर एका छेदिकेवर एकरूप आंतरछेद कापत असतील तर त्या रेषा, दुसऱ्या कोणत्याही छेदिकेवर एकरूप आंतरछेद कापतात.
(मग त्या छेदिका परस्पर समांतर असोत वा नसोत.)

पक्ष : L, M व N ह्या तीन समांतर रेषांना T ही छेदिका अनुक्रमे A, B व C बिंदूंत छेदते, आणि रेख AB ≅ रेख BC. U ही दुसरी एक छेदिका, L, M व N ह्या रेषांना अनुक्रमे P, Q व R बिंदूंत छेदते.

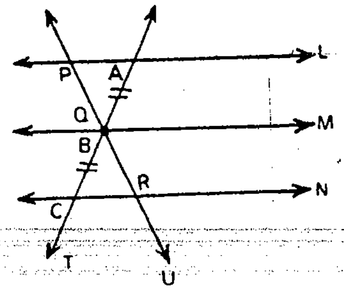


आ. 9·72

साध्य : रेख PQ ≅ रेख QR.

सिद्धता : (U ही T ला समांतर नाही असेच आपण मानू. कारण U ∥ T असतानाचा विचार मागील प्रमेयात झाला आहे.)

U व T ह्या परस्परांस समांतर नाहीत असे मानले. Q बिंदूबाबत पुढील दोन स्थिती संभवतात. (1) Q = B व (2) Q ≠ B.



आ. 9·73

(i) यांपैकी Q = B या स्थितीचा विचार प्रथम करू. L ∥ N यांना T या छेदिकेने छेदल्यामुळे होणारे व्युत्क्रम कोन एकरूप असतात.

∴ ∠PAC ≅ ∠ACR

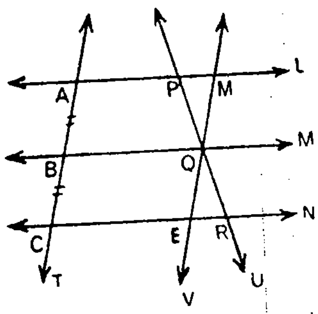
∠ABP ≅ ∠CBR ··· (विरुद्ध कोन)

व रेख AB ≅ रेख BC ········ (पक्ष)

∴ △ABP ≅ △CBR ······ (कोबाको)

व त्यामुळे रेख BP ≅ रेख BR म्हणजेच रेख QP ≅ रेख QR (Q = B)

(ii) आता Q ≠ B या स्थितीचा विचार करू. Q हा रेषा T च्या बाहेरचा बिंदू आहे. समांतर रेषेच्या अस्तित्वाच्या प्रमेयानुसार Q बिंदूतून जाणारी व T ह्या रेषेला समांतर असणारी रेषा काढा.



आ. 9·74

समजा ती रेषा V आहे वतिचे L आणि N या रेषांशी छेदनबिंदू M व E आहेत.

आता, समांतर छेदिकांसाठी सिद्ध केलेल्या प्रमेयावरून, रेख MQ ≅ रेख QE होते.

(iii) पुढे, △MQP व △EQR यांमध्ये,

∠PMQ ≅ ∠REQ ·············· (व्युत्क्रम कोन)

∠MQP ≅ ∠EQR ·············· (विरुद्ध कोन)

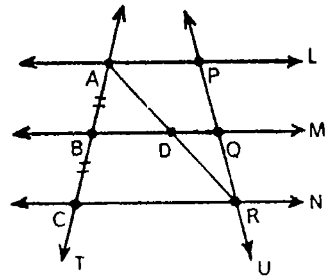
व रेख MQ ≅ रेख QE ··················· (भाग ii)

∴ △MQP ≅ △EQR

व म्हणून रेख PQ ≅ रेख QR होते.

या प्रमेयाची आणखी एक सिद्धता अशी देता येईल.
A व C हे बिंदू M रेषेच्या विरुद्ध अंगास आहेत आणि R व C हे बिंदू M रेषेच्या एकाच अंगास आहेत. त्यामुळे A व R बिंदू हे M रेषेच्या विरुद्ध अंगास असले पाहिजेत.

∴ रेख AR ही M रेषेस छेदते. समजा तो छेदनबिंदू D आहे.

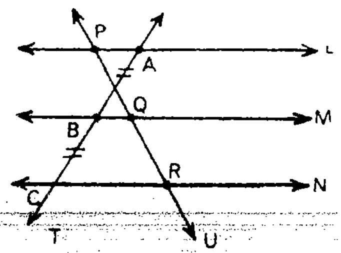


आ. 9·75

△ ACR चा विचार केल्यास,
B हा भुजा AC चा मध्यबिंदू आहे आणि रेख BD ∥ रेख CR आहे.
∴ D हा बिंदू भुजा AR चा मध्यबिंदू आहे. पुढे △ ARP चा विचार केल्यास,
D हा बिंदू भुजा AR चा मध्यबिंदू व रेख DQ रेख ∥ रेख AP.
∴ Q हा रेख PR चा मध्यबिंदू आहे म्हणजेच, रेख PQ ≅ रेख QR.

§ 9·56 **प्रश्न :**

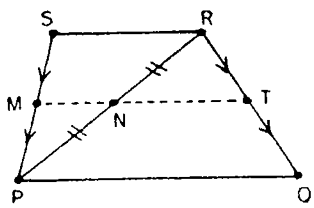
वर जे प्रमेय सिद्ध केले आहे त्यातील छेदिकांची स्थिती बाजूच्या आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे आहे असे माना आणि रेख AB ≅ रेख BC यावरून रेख PQ ≅ रेख QR हे सिद्ध करा.



आ. 9·76

§ 9·57 **सोडवलेली उदाहरणे :**

1. समलंब □PQRS मध्ये रेख PQ ∥ रेख RS. रेख PS, रेख QR व रेख PR यांचे मध्यबिंदू अनुक्रमे M, N व T आहेत. तर सिद्ध करा की M, N व T हे बिंदू एकरेषीय आहेत.

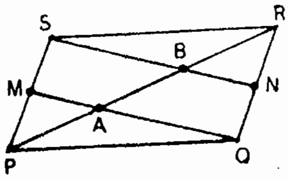


आ. 9·77

सिद्धता :

△ PSR मध्ये रेख PS चा मध्यबिंदू M आहे आणि रेख PR चा मध्यबिंदू N आहे त्यामुळे रेषा MN ∥ रेषा SR.
पण रेषा SR ∥ रेषा PQ,
∴ रेषा MN ∥ रेषा PQ.
असाच विचार △ PQR बाबत केल्यास,
N हा रेख PR चा मध्यबिंदू, व
T हा रेख QR चा मध्यबिंदू आहे.
∴ रेषा NT ∥ रेषा PQ,
रेषा PQ च्या बाहेर असलेल्या N या बिंदूतून जाणाऱ्या व रेषा PQ ला समांतर असणाऱ्या दोन भिन्न रेषा राहू शकत नाहीत. (समांतर-रेषा गृहीतक). त्यामुळे रेषा NT आणि रेषा MN एकच आहेत.
म्हणजेच M, N, T हे एकरेषीय आहेत.

2. समांतरभुज चौकोन PQRS मध्ये रेख PS चा मध्यबिंदू M आहे व रेख QR चा मध्यबिंदू N आहे. रेख MQ व रेख SN हे रेख PR ला अनुक्रमे A व B या बिंदूंत छेदतात. A हा P व B च्या दरम्यान आहे आणि B हा A व R च्या दरम्यान आहे. तर सिद्ध करा की रेख PA ≅ रेख AB ≅ रेख BR.



आ. 9·78

सिद्धता :

(i) $l(PS) = l(QR)$ .... (समांतरभुज चौकोन PQRS च्या संमुख भुजा)

$\therefore \frac{1}{2} l(PS) = \frac{1}{2} l(QR)$

$\therefore l(SM) = l(QN)$

म्हणजे रेख SM ≅ रेख QN.

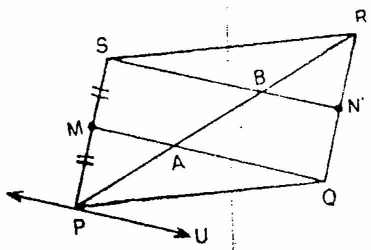
शिवाय रेख SM ∥ रेख QN

(M हा रेख PS चा मध्यबिंदू आहे, आणि N हा रेख QR चा मध्यबिंदू आहे.)

(समांतरभुज चौकोनाच्या संमुख भुजा म्हणून, रेख PS ∥ रेख QR)

त्यामुळे □SMQN हा समांतरभुज चौकोन होतो व त्यामुळे रेषा MQ ∥ रेषा SN.

(ii) P या बिंदूतून जाणारी व रेषा MQ ला समांतर असणारी एक रेषा घ्या. समजा ती U आहे.

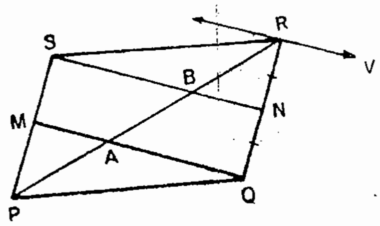


आ. 9·79

आता रेषा SN, रेषा MQ आणि रेषा U या समांतर रेषांनी रेषा PS वर रेख SM व रेख MP हे एकरूप आंतरछेद कापले आहेत. त्याअर्थी त्या तीन रेषांमुळे रेषा PR वर कापलेले आंतरछेद सुद्धा एकरूपच असतील.

∴ रेख PA ≅ रेख AB.

(iii) R या बिंदूतून जाणारी व रेषा SN ला समांतर असणारी एक रेषा घ्या. समजा ती V आहे.



आ. 9·80

रेषा MQ, रेषा SN व रेषा V या समांतर रेषांनी, रेषा RQ वर रेख RN व रेख NQ हे एकरूप आंतरछेद कापले आहेत. त्याअर्थी त्या तीन रेषांनी, रेषा PR वर कापलेले आंतरछेद सुद्धा एकरूपच असतील.

∴ रेख AB ≅ रेख BR

म्हणून, भाग (ii) व (iii) वरून,

रेख PA ≅ रेख AB ≅ रेख BR.

आपण काय शिकलो ?

(1) **संज्ञा-व्याख्या :**

चौकोन; चौकोनाचा शिरोबिंदू; चौकोनाचे क्रमागत शिरोबिंदू; चौकोनाचे संमुख शिरोबिंदू; क्रमागत किंवा संलग्न भुजा; संमुख कोन; समांतरभुज चौकोन; समभुज चौकोन; काटकोन चौकोन; चौरस; समलंब चौकोन; समांतर रेषांमधील अंतर; आंतरछेद.

(2) **कल्पना :**

चौकोनाचे नामकरण, लेखन व वाचन; भुजांची समांतर जोडी.

(3) **प्रमेये :**

(i) त्रिकोणाच्या आंतर कोनांच्या मापांची बेरीज (ii) त्रिकोणाचे बाह्यकोन प्रमेय–2 (iii) 30 – 60 – 90 प्रमेय व त्याचा व्यत्यास (iv) समांतर रेषांमधील अंतर (v) समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण (vi) समांतरभुज चौकोनाचे क्रमागत कोन (vii) समांतरभुज चौकोनाच्या कसोटीची प्रमेये–1, 2, 3 (viii) त्रिकोणाच्या दोन बाजूंचे मध्य जोडणारा रेषाखंड (ix) समांतर रेषांच्या आंतरछेदांचे प्रमेय–1, 2.

उपप्रमेये :

(i) एका त्रिकोणाचे दोन कोन दुसऱ्या त्रिकोणाच्या दोन कोनांशी एकरूप असतील तर त्या त्रिकोणांच्या उरलेल्या कोनांतील संबंध.

(ii) त्रिकोणाच्या दोन कोनांच्या मापांची बेरीज त्याच्या उरलेल्या कोनाच्या मापाएवढी असणारा त्रिकोण.

प्रश्नसंग्रह

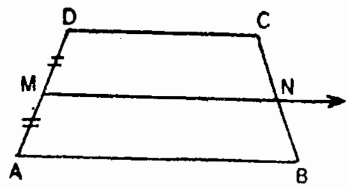
1. पुढील विधाने, योग्य शब्द घालून (ती सत्य होतील अशा प्रकारे), पूर्ण करा.

(i) समलंब चौकोनाच्या $\frac{\text{समांतर}}{\text{असमांतर}}$ बाजूंचे मध्य सांधणारी रेषा ——— मध्यबिंदूतून जाते.

(ii) समांतरभुज चौकोनाच्या संमुख भुजांचे मध्य सांधणाऱ्या दोन्ही रेषा कर्णाच्या मध्यबिंदूतून $\frac{\text{जातात.}}{\text{जात नाहीत.}}$

2. समलंब चौकोन ABCD मध्ये रेख AB ∥ रेख CD आहे. रेख AD चा मध्यबिंदू M आहे. M बिंदूतून जाणारी रेख AB ला समांतर काढलेली रेषा, रेख BC ला N या बिंदूत छेदते.

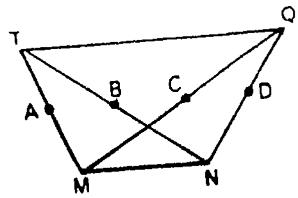
तर सिद्ध करा की रेख BN $\cong$ रेख CN.



आ. 9·81

3. समलंब चौकोनाच्या असमांतर भुजांचे मध्यबिंदू सांधणारी रेषा त्या चौकोनाच्या समांतर भुजांना समांतर असते हे सिद्ध करा.

4. □ MNQT हा समलंब चौकोन आहे. रेख TM, रेख TN, रेख MQ व रेख QN यांचे अनुक्रमे A, B, C व D हे मध्यबिंदू आहेत. तर सिद्ध करा की A, B, C आणि D हे बिंदू एकरेषीय आहेत. (आ. 9·82)



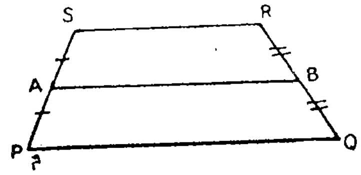
आ. 9.82

5. समलंब चौकोनाच्या असमांतर भुजांचे मध्यबिंदू सांधणाऱ्या रेषाखंडाची लांबी, दोन समांतर भुजांच्या लांबींच्या बेरजेच्या निम्मी असते हे सिद्ध करा.

6. समलंब □ PQRS मध्ये

रेख PQ ∥ रेख RS

रेख PS व रेख QR यांचे मध्यबिंदू अनुक्रमे A व B आहेत. या अनुषंगाने खालील प्रश्नातील रिकाम्या जागा भरा.

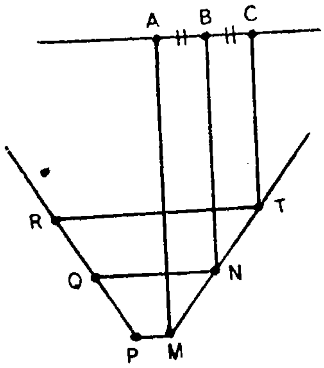


आ. 9·83

(i) जर $l(PQ)=13$ व $l(SR)=7$, तर $l(AB)=$ ....

(ii) जर $l(PQ)=8$ व $l(SR)=6$, तर $l(AB)=$ ....

(iii) जर $l(PQ)=26$ व $l(AB)=24$, तर $l(SR)=$ ....



आ. 9·84

7. बाजूच्या आकृतीत,

रेख AB ≅ रेख BC.

रेख AM ∥ रेख BN ∥ रेख CT.

रेख PM ∥ रेख QN ∥ रेख RT

तर दाखवा की,

(i) रेख MN ≅ रेख NT,

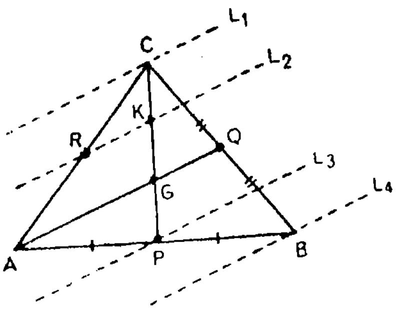
(ii) रेख PQ ≅ रेख QR.

8. △ ABC च्या, रेख AB रेख BC व रेख AC चे अनुक्रमे P, Q व R हे मध्यबिंदू आहेत. C, R, P आणि B यांपैकी प्रत्येक बिंदूतून रेख AQ ला समांतर रेषा काढल्या. या रेषांना अनुक्रमे L_1, L_2, L_3 व L_4 नावे दिली.

L_2 रेषा, रेख CP ला K बिंदूत छेदते.

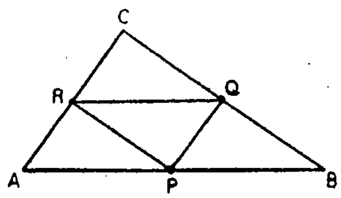
रेख AQ व रेख CP यांचा छेदनबिंदू G आहे; तर

$l(CK)=l(KG)=l(GP)$ असे दाखवा.

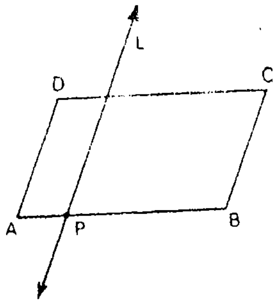


आ. 9·85

9. $\triangle ABC$ च्या रेख AB, रेख BC व रेख AC या बाजूंचे मध्यबिंदू अनुक्रमे P, Q व R आहेत. तर सिद्ध करा की, $\triangle APR$, $\triangle PBQ$, $\triangle RQC$ व $\triangle QRP$ हे सर्व परस्परांशी एकरूप आहेत.



आ. 9·86



आ. 9·87

10. □ ABCD या समांतरभुज चौकोनाच्या रेख AB या भुजेतील P हा एक बिंदू आहे. रेषा L ही P बिंदूतून जाते व रेख AD ला समांतर आहे. तर सिद्ध करा की, रेषा L ही, रेषा DC ला D व C यांच्या दरम्यान छेदते.

पारिभाषिक शब्द

आंतरछेद – Intercept
चौकोनाचा कर्ण – Diagonal
क्रमागत – Consecutive
चौकोन – Quadrilateral
काटकोन चौकोन – Rectangle
समभुज चौकोन – Rhombus
समलंब चौकोन – Trapezium
समांतरभुज चौकोन – Parallelogram
चौरस – Square
संमुख – Opposite
स्थानांतरण प्रतिमा – Translation image

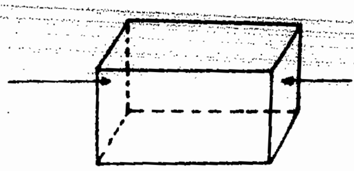
प्रकरण 10

समांतर आणि लंब प्रतले

§ 10·1 समांतर प्रतले :

एकाच प्रतलात असणाऱ्या रेषा एकमेकींना छेदत नसतील तर त्यांना आपण समांतर रेषा म्हणतो. अर्थात समांतर रेषा दोन अटी पूर्ण करतात—(1) त्या एकप्रतलीय असतात, आणि (2) एकमेकींना छेदत नाहीत.

आता आपण समांतर प्रतले म्हणजे काय हे पाहू.



आ. 10·1

एखादया खोलीच्या समोरासमोरील भिंतींचे सपाट पृष्ठभाग लक्षात घ्या. चौकोनी पेटी किंवा ठोकळ्याचे समोरासमोरील पृष्ठ विचारात घ्या. उदाहरणार्थ, बाजूच्या आकृतीत बाणांनी दाखवलेली पृष्ठे पाहा.

ही पृष्ठे ज्या प्रतलांत समाविष्ट आहेत ती प्रतले एकमेकांशी समांतर असावीत असे आपणास साहजिकच वाटते.

एक रेषा आणि एक प्रतल परस्परांशी समांतर आहेत असे आपण केव्हा म्हणू ? एक प्रतल आणि दुसरे प्रतल परस्परांशी समांतर आहेत असे आपणास केव्हा म्हणता येईल ?

व्याख्या :

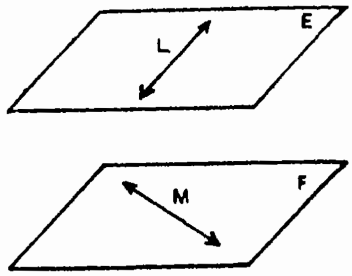
> एक रेषा आणि एक प्रतल परस्परांना छेदत नसतील तर ती **समांतर** आहेत असे म्हणतात. रेषा L आणि प्रतल E समांतर असतील तर $L \parallel E$ असे लिहितात. $L \parallel E$ म्हणजेच $E \parallel L$.
> दोन प्रतले परस्परांना छेदत नसतील तर ती समांतर आहेत असे म्हणतात.

प्रतल E आणि प्रतल F समांतर असतील तर $E \parallel F$ असे लिहितात. $E \parallel F$ म्हणजेच $F \parallel E$.

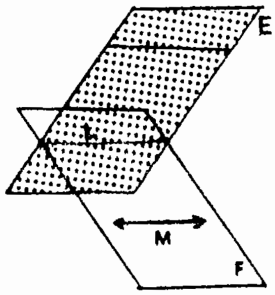
एका प्रतलातील समांतर रेषांच्या गुणधर्मांचा अभ्यास करताना ज्या गृहीतकांचा आपण उपयोग केला ती गृहीतके समांतर प्रतलांचा अभ्यास करण्यासाठी सुद्धा उपयुक्त आहेत. पण समांतर रेषा व समांतर प्रतले या कल्पनांमध्ये चूक होता कामा नये. समांतर रेषा एकप्रतलीय असतात. पण एक रेषा आणि एक प्रतल तसेच दोन प्रतले समांतर असतील तर ती एकप्रतलीय असण्याचा प्रश्न उद्भवत नाही.

दोन प्रतले समांतर असतील तर त्या प्रतलांतील रेषा समांतर असल्याच पाहिजेत असे नाही. बाजूची आकृती पाहा.

या आकृतीत प्रतल E आणि प्रतल F समांतर आहेत. पण प्रतल E मधील रेषा L आणि प्रतल F मधील रेषा M ह्या समांतर नाहीत.



आ. 10·2



आ. 10·3

दोन रेषा समांतर असतील तर त्या समांतर प्रतलांत असल्याच पाहिजेत असेही नाही. बाजूची आकृती पाहा.

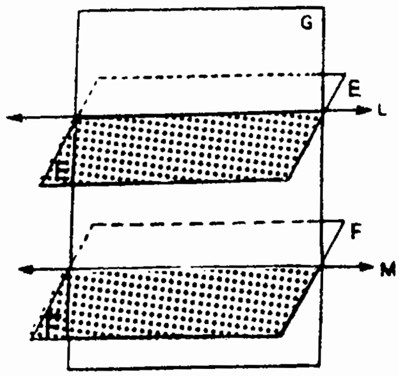
आ. 10·3 मध्ये प्रतल E आणि प्रतल F परस्परांना छेदतात. म्हणजेच ती समांतर नाहीत. पण प्रतल E मधील रेषा L आणि प्रतल F मधील रेषा M ह्या परस्परांशी समांतर आहेत.

दोन समांतर प्रतलांत असणाऱ्या रेषा समांतर असतातच असे नाही हे आपण पाहिले. त्या समांतर केव्हा असू शकतील ?

§ 10·2 ▪ प्रमेय :

जर एक प्रतल दोन समांतर प्रतलांना छेदत असेल तर त्यांच्या छेदनरेषा समांतर असतात.

समांतर रेषा व समांतर प्रतले यांच्या व्याख्या आणि छेदणाऱ्या दोन प्रतलांविषयीचे गृहीतक वापरून हा गुणधर्म कसा प्रस्थापित कराल ?



आ. 10·4

प्रतल G हे E आणि F ह्या दोन समांतर प्रतलांना छेदत आहे असे समजा.

दोन भिन्न प्रतले एकमेकांना छेदत असतील तर त्यांचा छेद एक सरळ रेषा असते या गृहीतकावरून.

प्रतल G आणि प्रतल E यांचा छेद एक रेषा असली पाहिजे; तसेच प्रतल G आणि प्रतल F यांचा छेदही एक रेषा असते.

या रेषा अनुक्रमे L आणि M आहेत असे समजा.

रेषा L आणि रेषा M ह्या एकमेकींस समांतर आहेत असे दाखवायचे आहे. त्याकरता पुढील दोन अटी पूर्ण झाल्याचे दाखवले पाहिजे.

(1) रेषा L व रेषा M ह्या एकाच प्रतलात आहेत.

(2) त्या एकमेकींस छेदत नाहीत.

ह्या दोन्ही रेषा G ह्या प्रतलाच्या E व F ह्या प्रतलांशी झालेल्या छेदामुळे मिळाल्या असल्याने त्या G ह्या प्रतलात आहेत. म्हणजे त्या एकप्रतलीय आहेत.

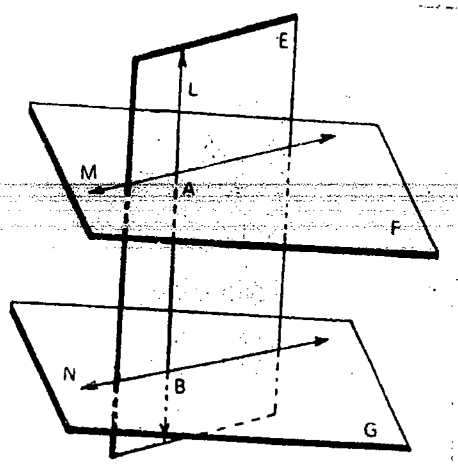
आता त्या एकमेकींना छेदत नाहीत असे दाखवले पाहिजे. ह्या रेषा E व F ह्या प्रतलात असल्याने त्या रेषा जर एकमेकींस छेदत असतील तर E आणि F ही प्रतलेही एकमेकांना छेदतील. पण E आणि F ही प्रतले समांतर असल्याचे दिलेले आहे. म्हणून रेषा L आणि रेषा M परस्परांना छेदत नाहीत.

यावरून रेषा L ∥ रेषा M हे प्रस्थापित झाले.

दोन समांतर रेषांपैकी एकीस लंब असणारी रेषा दुसरीसही लंब असते हे तुम्हांला माहीत आहे. तसाच गुणधर्म प्रतलांच्या संबंधातही सत्य असतो. तोच पुढील प्रमेयात मांडला आहे.

§ 10·3 ▪ प्रमेय :

दोन समांतर प्रतलांपैकी एका प्रतलास लंब असणारी रेषा दुसऱ्या प्रतलासही लंब असते.



आ. 10·5

रेषा L ही प्रतल F ला A मध्ये आणि प्रतल G ला B मध्ये छेदते असे समजू.

रेषा L ⊥ प्रतल F दिलेले आहे. म्हणजे A मधून जाणाऱ्या आणि F मध्ये राहणाऱ्या प्रत्येक रेषेला रेषा L लंब आहे.

आता रेषा L ⊥ प्रतल G दाखवायचे आहे. म्हणजे B मधून जाणाऱ्या व G मध्ये राहणाऱ्या प्रत्येक रेषेला, रेषा L लंब असल्याचे दाखवले पाहिजे. N ही अशी एक रेषा काढू.

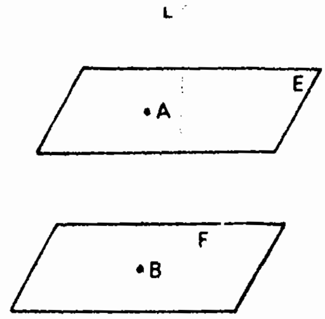
रेषा L व रेषा N एकमेकींना B मध्ये छेदतात. त्यामुळे ह्या दोन रेषांमुळे एक प्रतल निश्चित होते. ते E आहे असे समजू. हे प्रतल G ला अर्थातच N मध्ये छेदते. ते प्रतल F ला रेषा M मध्ये छेदते असे समजू. बिंदू A हा रेषा M वर आहेच (का ?) रेषा L ⊥ प्रतल F असल्याने रेषा L ⊥ रेषा M. रेषा M व रेषा N ह्या F व G या दोन समांतर प्रतलांना प्रतल E ने छेदल्यामुळे मिळालेल्या रेषा आहेत. त्यामुळे त्या समांतर आहेत.

'दोन समांतर रेषांपैकी एकीस लंब असणारी रेषा दुसरीसही लंब असते' ह्या प्रमेयानुसार रेषा L ⊥ रेषा N हे सिद्ध होते. B मधून जाणारी व G प्रतलात राहणारी कोणतीही रेषा घेतली तरी हेच होईल. म्हणून रेषा L ⊥ प्रतल G.

एकाच रेषेस लंब असणाऱ्या एका प्रतलातील रेषा एकमेकींस समांतर असतात. हा गुणधर्म प्रतलांच्या संबंधातही सत्य आहे. हेच खालील प्रमेयात मांडले आहे. हे प्रमेय वरील प्रमेयाचा व्यत्यास आहे हे तुमच्या सहज लक्षात येईल.

§ 10·4 ▪ प्रमेय :

एकाच रेषेस लंब असणारी दोन प्रतले समांतर असतात.



आ. 10·6

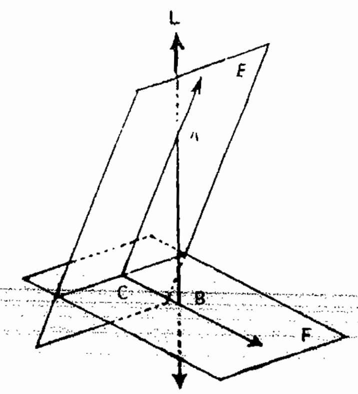
प्रतल E आणि प्रतल F पैकी प्रत्येक प्रतल एकाच रेषा L ला लंब आहेत असे समजा.

प्रतल E आणि प्रतल F समांतर आहेत असे आपण दाखवायचे आहे.

ही प्रतले समांतर नसतील तर ती एकमेकांना छेदतील. समजा त्यांच्या छेदावर C हा एक बिंदू आहे. (आ. 10·7)

रेषा L व प्रतल E चा छेदबिंदू A आणि रेषा L व प्रतल F चा छेदबिंदू B आहे असे समजा.

यावरून खालीलप्रमाणे आकृती मिळेल.



आ. 10·7

आता रेषा AC ⊥ रेषा L (का ?)

आणि रेषा BC ⊥ रेषा L (का ?)

म्हणजेच C ह्या बाह्यबिंदूतून रेषा L ला दोन लंब आहेत. पण हे अशक्य आहे; कारण कोणत्याही बाह्यबिंदूतून एका रेषेला एक आणि एकच लंबरेषा असते.

∴ प्रतल E आणि प्रतल F एकमेकांना छेदणे अशक्य आहे.

∴ प्रतल E ∥ प्रतल F

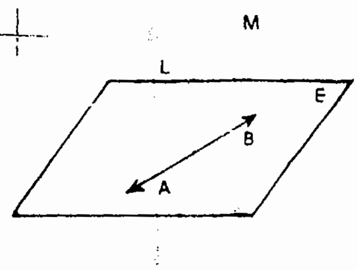
उपप्रमेय :

एकाच प्रतलास समांतर असणारी दोन प्रतले परस्परांना समांतर असतात.

या उपप्रमेयात सांगितल्याप्रमाणे तीन प्रतले घेऊन त्यांपैकी एका प्रतलास लंब असणारी रेषा घ्या. वरील प्रमेयाचा आधार घेऊन उपप्रमेयात सांगितलेला गुणधर्म प्रस्थापित करा.

§ 10·5 ▪ प्रमेय :

एकाच प्रतलास लंब असणाऱ्या दोन रेषा परस्परांना समांतर असतात.



आ. 10·8

रेषा L आणि रेषा M पैकी प्रत्येक रेषा प्रतल E ला लंब आहे असे समजा.

रेषा L आणि रेषा M समांतर आहेत हे प्रस्थापित करायचे आहे.

रेषा L आणि रेषा M ह्या रेषा E ह्या एकाच प्रतलास लंब आहेत.

यावरून या रेषांच्या एकप्रतलीयतेबद्दल काय सांगता येईल ?

समजा रेषा L आणि रेषा M, प्रतल E ला अनुक्रमे A आणि B बिंदूंत छेदतात.

आता रेषा AB लक्षात घ्या. रेषा L ⊥ प्रतल E आणि रेषा M ⊥ प्रतल E.

∴ रेषा L ∥ रेषा M. (प्रमेय 7·22 व प्रमेय 8·6 पाहा.)

उपप्रमेय :

जर दोन समांतर रेषांपैकी एक रेषा एखादया प्रतलास लंब असेल तर दुसरीही रेषा त्या प्रतलास लंब असते.

ह्या उपप्रमेयाचे सुद्धा समर्थन देणे शक्य आहे. त्यात व्यक्त केलेला गुणधर्म महत्वाचा असून तो आपल्याला नीट समजून घेणे आवश्यक आहे.

दोन समांतर रेषांनी, त्यांना लंब असणाऱ्या रेषेवर केलेल्या आंतरछेदाच्या लांबीला आपण त्या समांतर रेषांमधील अंतर म्हणतो.

समांतर प्रतलातील अंतर म्हणजे काय ?

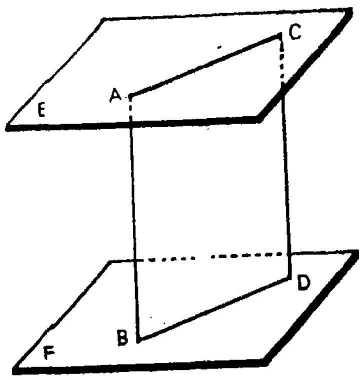
दोन समांतर प्रतलांनी, त्यांना लंब असणाऱ्या रेषेवर केलेल्या आंतरछेदाच्या लांबीला त्या **समांतर प्रतलातील अंतर** म्हणतात.

या अंतराविषयीचा गुणधर्म खालील प्रमेयात सांगितला आहे.

§ 10·6 ▪ **प्रमेय :**

दोन समांतर प्रतलांतील अंतर सर्वत्र सारखे असते.

याचाच अर्थ असा की, दोन समांतर प्रतलांमधील त्यांना लंब असणाऱ्या सर्व रेषाखंडांची लांबी सारखी असते.



आ. 10·9

समजा E आणि F ही दोन समांतर प्रतले आहेत, रेखAB आणि रेख CD या प्रतलांना लंब आहेत.

$l(AB) = l(CD)$ हे आपणास दाखवायचे आहे.

रेख AB आणि रेख CD, प्रतल E ह्या एकाच प्रतलास लंब आहेत.

∴ रेखAB ∥ रेखCD; या खेरीज रेखAB आणि रेख CD एकप्रतलीय आहेत.

आता रेखAC आणि रेखBD हे रेषाखंड प्रतल E आणि प्रतल F ह्या समांतर प्रतलांना छेदणाऱ्या प्रतलाच्या छेदन रेषेवर आहेत.

∴ रेख AC ∥ रेख BD

∴ □ABDC समांतरभुज चौकोन आहे.

समांतरभुज चौकोनाच्या समोरासमोरील बाजू एकरूप असतात.

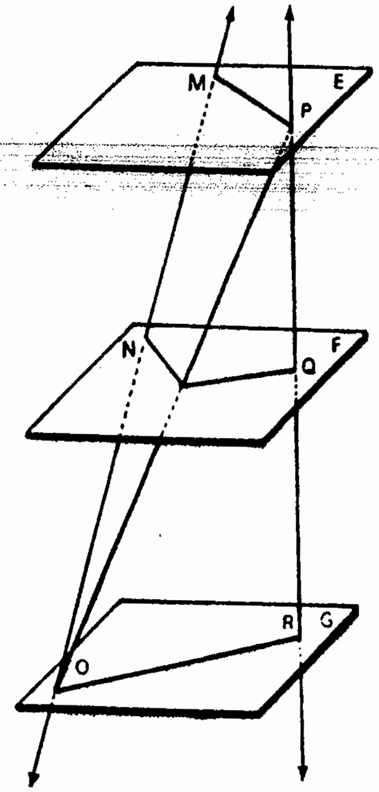
∴ रेख AB ≅ रेख CD

म्हणजेच $l(AB) = l(CD)$.

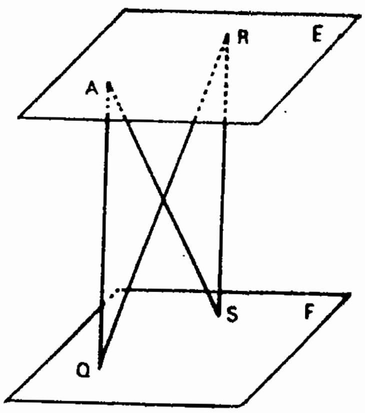
वरील आकृतीत ABDC ही आकृती कोणत्या प्रकारचा चौकोन आहे ?

§ 10·7 प्रश्न :

1. खालील विधानांपैकी कोणते विधान बरोबर व कोणते चूक आहे हे सांगा.
   (a) परस्परांना छेदणाऱ्या दोन प्रतलांतील कोणत्याही रेषा एकमेकींशी कधीच समांतर असू शकत नाहीत.
   (b) एकाच प्रतलास लंब असणाऱ्या दोन रेषा एकमेकींशी समांतर असतात.
   (c) दिलेल्या प्रतलास लंब नसलेल्या दोन रेषा परस्परांशी कधीच समांतर असू शकत नाहीत.
   (d) समांतर प्रतलांपैकी एका प्रतलास लंब असणारी रेषा दुसऱ्या प्रतलास लंब असलीच पाहिजे.
   (e) दोन समांतर रेषांपैकी एका रेषेस लंब असणारे प्रतल दुसऱ्या रेषेस लंब असलेच पाहिजे.
   (f) दोन समांतर प्रतलांतील कोणत्याही दोन रेषा परस्परांशी समांतर असतात.
   (g) समांतर प्रतलांतील कोणत्याही दोन रेषा परस्परांना छेदत नाहीत.
   (h) एकाच प्रतलाशी समांतर असणाऱ्या दोन रेषा परस्पर लंब असू शकतात.
   (i) एकाच रेषेला लंब असणारी दोन प्रतले एकमेकांना छेदू शकतात.
   (j) दोन समांतर रेषांना दोन समांतर प्रतले छेदत असतील, तर प्रतलांमध्ये येणारे रेषाखंड एकरूप असतात.
   (k) परस्परांना छेदणाऱ्या दोन प्रतलांना एक तिसरे प्रतल छेदत असेल, तर छेदन रेषा एकमेकींशी समांतर असू शकतात.
2. दोन रेषांपैकी प्रत्येक रेषा एका तिसऱ्या रेषेला समांतर असेल तर त्या रेषा परस्पर समांतर असतात हे दाखवा. (दिलेल्या एका रेषेला समांतर असणाऱ्या दोन रेषा घ्या. दिलेल्या रेषेस लंब असणारे प्रतल घ्या. या प्रकरणात तुम्ही अभ्यासलेल्या प्रमेयांचा व उपप्रमेयांचा उपयोग करा.)
3. एका प्रतलात एक रेषा आहे. या रेषेला लंब असणारी रेषा त्या प्रतलास लंब असू शकते हे दाखवा.
4. आ. 10·10 मध्ये प्रतल E ∥ प्रतल F ∥ प्रतल G आणि रेख MN ≅ रेख NO तर सिद्ध करा की रेख PQ ≅ रेख QR



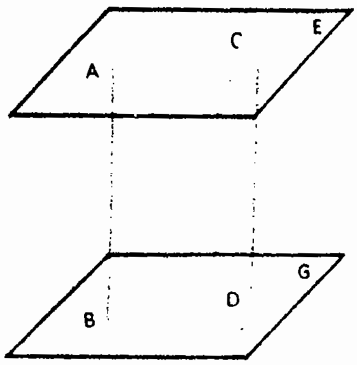
आ. 10·10



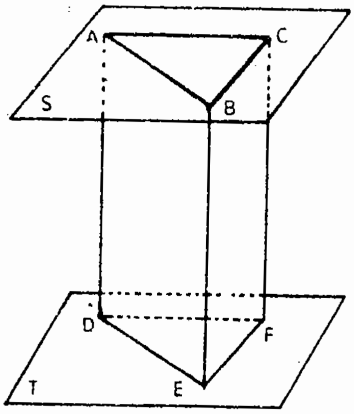
आ. 10·11

5. बाजूच्या आकृतीत प्रतल E ∥ प्रतल F.
   रेख AQ ⊥ प्रतल E आणि
   रेख RS ⊥ प्रतल E,
   तर सिद्ध करा की रेख AS ≅ रेख QR.

6. बाजूच्या आकृतीत प्रतल E ∥ प्रतल G
रेख AB ⊥ प्रतल E
रेख CD ⊥ प्रतल E आणि
रेख AB ⊥ प्रतल G,
तर सिद्ध करा की रेख CD ⊥ प्रतल G.



आ. 10·12



आ. 10·13

7. शेजारच्या आकृतीत रेख AD, रेख BE आणि रेख CF पैकी प्रत्येक रेषाखंड, प्रतल S आणि प्रतल T ला लंब आहे तर सिद्ध करा की $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

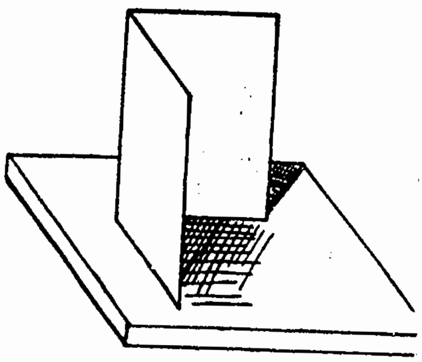
8. प्रतल P आणि प्रतल F पैकी प्रत्येक प्रतलास रेषा L लंब आहे. रेषा Q ∥ रेषा L, तर सिद्ध करा की रेषा Q ही प्रतल P आणि प्रतल F पैकी प्रत्येक प्रतलास लंब आहे.

9. प्रतल E ∥ प्रतल F. प्रतल E मधील बिंदू A व बिंदू B मधून त्या प्रतलास काढलेले लंब हे प्रतल F ला अनुक्रमे बिंदू C व बिंदू D मध्ये मिळत असतील, तर ACDB हा काटकोन चौकोन आहे हे सिद्ध करा.

§ 10·8 द्वितल कोन; लंब प्रतले :

एक रेषा दुसऱ्या रेषेला लंब असणे तसेच एक रेषा एका प्रतलास लंब असणे म्हणजे काय हे आपण पाहिले आहे. आता आपण एक प्रतल दुसऱ्या प्रतलास लंब असणे म्हणजे काय हे पाहू.

कागदाचा एक तुकडा घ्या. हा तुकडा म्हणजे प्रतलाचे एक मर्यादित स्वरूप होय. आता कागदाच्या तुकड्यास एक घडी घाला. घडीवर येणाऱ्या रेषेने दिलेल्या प्रतलाचे दोन अर्धप्रतलात विभाजन होईल. घडीवरील रेषा त्या दोन अर्धप्रतलांची समाईक कडा असेल. आता कागद आ. 10·14 मध्ये दाखविल्याप्रमाणे टेबलावर ठेवा.

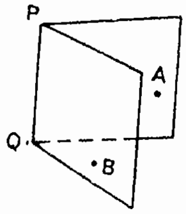


आ. 10·14

दोन अर्धप्रतले एक 'कोन' तयार करीत असल्याचे दिसते. येथे 'कोन' या शब्दाला प्रतलाच्या संदर्भात आपण निराळा अर्थ देणार आहोत. म्हणून याला नुसते 'कोन' म्हणण्याऐवजी 'द्वितल कोन' म्हणू. प्रतलामध्ये कोन होण्यासाठी आपल्याला **एकाच रेषेत नसलेले** दोन किरण लागतात. त्यांच्या संयोगाला आपण कोन म्हणतो. द्वितल कोनाची व्याख्या आपण त्याचप्रमाणे करू.

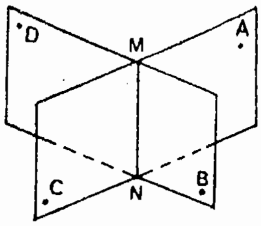
व्याख्या :

एक रेषा आणि ही रेषा ज्यांची समाईक कडा आहे अशी दोन नैकप्रतलीय अर्धप्रतले यांच्या संयोगाला **द्वितल कोन** म्हणतात. त्या रेषेला द्वितल कोनाची **कडा** (Edge) म्हणतात. कडा आणि दोन्हींपैकी कोणतेही एक अर्धप्रतल यांच्या संयोगाला द्विदल कोनाची **बाजू** (side) किंवा **पृष्ठ** (Face) म्हणतात.



आ. 10·15

रेषा PQ ही कडा असून बिंदू A व बिंदू B कोनाच्या वेगवेगळया बाजूंवरील बिंदू असतील तर तो द्वितल कोन ∠ A – PQ – B असा लिहितात. (आ. 10·15)



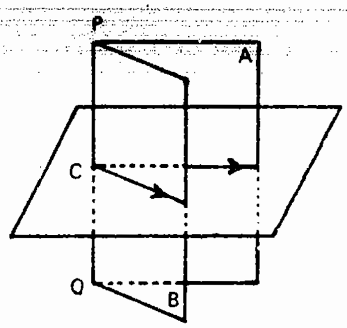
आ. 10·16

दोन रेषा एकमेकींना छेदतात तेव्हा एकूण किती कोन तयार होतात ? दोन प्रतले एकमेकांना छेदत असतील तर एकूण किती कोन तयार होतील ?

बाजूच्या आकृतीतील सर्व द्वितल कोनांची नावे सांगा.

दोन रेषा एकमेकींना छेदतात तेव्हा होणाऱ्या परस्पर विरुद्ध कोनांची व्याख्या तुम्ही केली आहे. आता दोन प्रतले एकमेकांना छेदतात तेव्हा होणारे विरुद्ध द्वितल कोन म्हणजे काय हे सांगा.

प्रतलातील कोनाशी संबंधित अशी 0 ते 180 मधील एक धन संख्या असते. तिला आपण कोनाचे माप म्हणतो. तसेच द्वितल कोनाचे माप ठरवता येईल काय ? द्वितल कोनाचे माप ठरवण्यापूर्वी दिलेल्या द्वितल कोनाचा विशिष्ट प्रतलीय कोनाशी काय संबंध आहे हे पुढे दाखवले आहे.



आ. 10·17

व्याख्या : द्वितल कोनाच्या कडेवरील कोणत्याही बिंदूतून जाणारे व कडेला लंब असणारे एक प्रतल असते. हे प्रतल द्वितल कोनाच्या बाजूंना ज्या किरणांत छेदते त्या किरणांच्या संयोगाला त्या द्वितल कोनाचा **प्रतल कोन** (plane angle) म्हणतात.

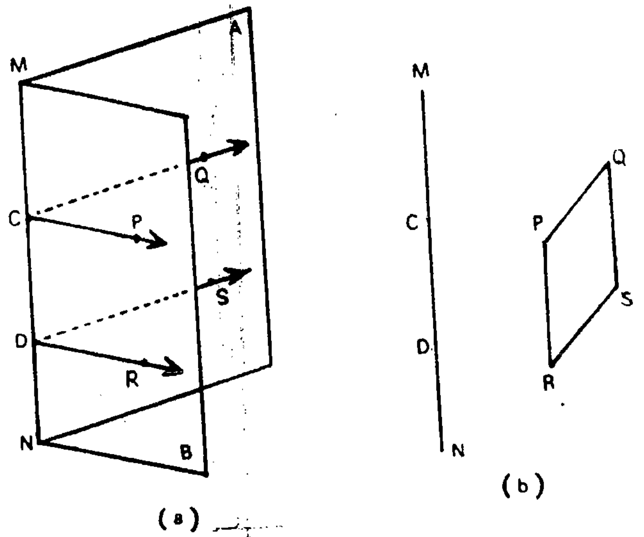
प्रतल कोनाच्या बाजू द्वितल कोनाच्या कडांना लंब असतात. म्हणून, प्रतल कोनाच्या एका बाजूत एक व दुसऱ्या बाजूत दुसरा किरण असेल आणि ते दोन्ही किरण द्वितल कोनाच्या कडांना एकाच बिंदूत लंब असतील; तर त्या किरणांच्या संयोगाला प्रतल कोन म्हणतात. अशी ही प्रतल कोनाची व्याख्या करता येईल.

प्रतल कोनाचे माप हेच संबंधित द्वितल कोनाचे माप असले पाहिजे असे समजणे स्वाभाविक आहे. पण द्वितल कोनाच्या कडेवरील कुठल्याही बिंदूवर प्रतल कोन घेतला तर चालेल काय ? द्वितल कोनाच्या कडेवरील दोन भिन्न बिंदूंवर प्रतल कोन घेतले तर त्यांची मापे सारखीच येतील काय ? ही मापे सारखी आली नाहीत तर प्रतल कोनाचे माप हेच संबंधित द्वितल कोनाचे माप होय असे म्हणणे चुकीचे ठरेल. म्हणून कोणत्याही द्वितल कोनाच्या दोन प्रतल कोनांची मापे सारखी असतात हे प्रस्थापित करणे आवश्यक ठरते.

यासंबंधीचे प्रमेय मांडून आपण हा गुणधर्म प्रस्थापित करू.

§ 10·9 ▪ **प्रमेय :**

दिलेल्या द्‌वितल कोनांचे कोणतेही दोन प्रतल कोन एकरूप असतात.



आ. 10·18

पक्ष : ∠A – MN – B या द्‌वितल कोनाच्या दोन प्रतल कोनांचे बिंदू C व बिंदू D हे शिरोबिंदू आहेत. असे समजा.

साध्य : $m\angle C = m\angle D$ हे दाखवायचे आहे.

रचना : ∠C च्या दोन बाजूंवर अनुक्रमे Q आणि P बिंदू घ्या. ∠D च्या बाजूंवर बिंदू S व बिंदू R असे घ्या की रेख CQ ≅ रेख DS आणि रेख CP ≅ रेख DR.

सिद्‌धता : रेख CQ ∥ रेख DS (एकाच रेषेवरील लंब), आणि रेख CQ ≅ रेख DS (रचना)

∴ □CDSQ हा समांतरभुज चौकोन आहे. समांतरभुज चौकोनाच्या समोरासमोरील बाजू एकरूप असतात.

∴ रेख CD ≅ रेख QS आणि रेख CD ∥ रेख QS (1)

रेख CP ∥ रेख DR ... (एकाच रेषेवरील लंब)

रेख CP ≅ रेख DR ... (रचना)

∴ □CDRP हा समांतरभुज चौकोन आहे.

∴ रेख CD ≅ रेख PR आणि रेख CD ∥ रेख PR (2)

(1) व (2) वरून

□PRSQ हा समांतरभुज चौकोन आहे.

∴ रेख PQ ≅ रेख RS

आता

रेख CQ ≅ रेख DS ... (रचना)

रेख CP ≅ रेख DR ... (रचना)

आणि रेख PQ ≅ रेख RS (सिद्‌ध)

त्रिकोण एकरूपतेच्या बाबाबा गृहीतकानुसार

$\triangle$ CPQ $\cong$ $\triangle$ DRS

$\because$ $\angle$ C $\cong$ $\angle$ D ... (एकरूप त्रिकोणांचे संगत कोन)

म्हणजेच $m\angle C = m\angle D$

द्विवितल कोनाचे कोणतेही दोन प्रतलकोन एकरूप असल्याचे दाखवल्यामुळे आपण खालील व्याख्या करू शकतो.

व्याख्या :

(1) द्विवितल कोनाचे माप म्हणजे त्याच्या कोणत्याही प्रतल कोनाचे माप.

या व्याख्येवरून एखादा द्विवितलकोन काटकोन असणे म्हणजे काय हे आपल्याला सहज सांगता येईल. त्यावरून दोन प्रतले एकमेकांना लंब केव्हा असतील हेही सांगता येईल.

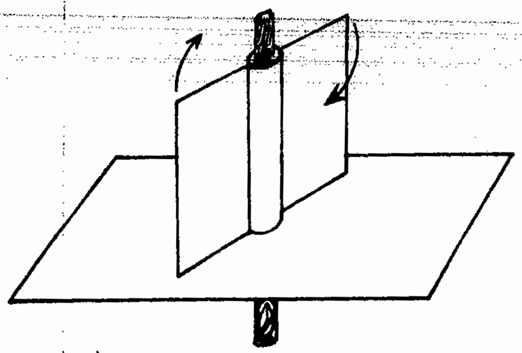
हेच पुढे मांडले आहे.

(2) ज्या द्विवितल कोनाचा प्रतल कोन काटकोन असतो त्या द्विवितल कोनास **द्विवितल काटकोन** (Right Dihedral Angle) म्हणतात.

(3) दोन प्रतले एकमेकांशी द्विवितल काटकोन करीत असतील तर त्यांना **लंब प्रतले** म्हणतात.

§ **10·10 ▪ प्रमेय :**

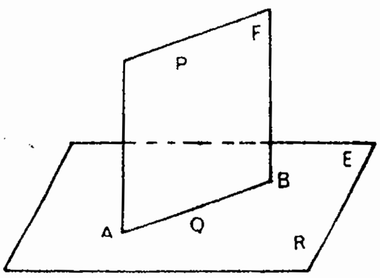
एक रेषा जर दिलेल्या प्रतलास लंब असेल तर त्या लंबरेषेतून जाणारे प्रत्येक प्रतल दिलेल्या प्रतलास लंब असते.



आ. 10·19

आ. 10·19 मध्ये दाखवल्यानुसार प्रतिकृती तयार करून या गुणधर्माचा पडताळा घ्या.

आता खालील आकृती पाहा.



आ. 10·20

समजा रेषा PQ ही प्रतल E ला बिंदू Q या ठिकाणी लंब आहे. प्रतल F हे रेषा PQ मधून जाणारे कोणतेही एक प्रतल आहे.

प्रतल F $\perp$ प्रतल E हे दाखवायचे अहे. प्रतल F आणि प्रतल E यांची छेदनरेषा AB आहे असे समजा.

प्रतल E मध्ये रेषा QR अशी घ्या की रेषा QR $\perp$ रेषा AB

आता रेषा QR $\perp$ रेषा AB ... (रचना)

आणि रेषा PQ $\perp$ रेषा AB ... (दिले आहे.)

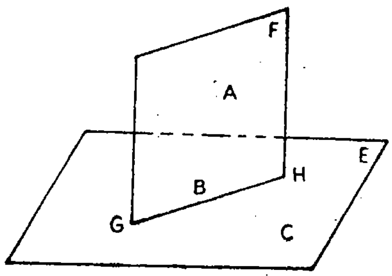
$\therefore$ प्रतल $\angle$ PQR हा काटकोन आहे.

$\therefore$ प्रतल F आणि प्रतल E मधील द्विवितल कोन हा द्विवितल काटकोन आहे.

$\therefore$ प्रतल F $\perp$ प्रतल E.

§ 10·11 ▪ **प्रमेय :**

दोन प्रतले लंब असतील तर त्यांच्या छेदनरेषेला लंब असणारी त्यांपैकी एका प्रतलातील कोणतीही रेषा दुसऱ्या प्रतलास लंब असते.



आ. 10·21

समजा प्रतल F ⊥ प्रतल E. या दोन प्रतलांची छेदनरेषा GH आहे. रेषा GH वर बिंदू B हा एक कोणताही बिंदू आहे.

प्रतल F मध्ये असणारी रेषा AB ⊥ रेषा GH.

रेषा AB ⊥ प्रतल E हे दाखवायचे आहे. प्रतल E मध्ये रेषा BC अशी घेऊ की रेषा BC ⊥ रेषा GH.

आता खालील विधाने वाचा व त्यांची कारणे दया.

विधाने	कारणे
1. प्रतल F ⊥ प्रतल E	....
2. प्रतल F व प्रतल E यांनी द्वितल काटकोन होतो;	....
या द्वितल कोनाचा प्रतल कोन काटकोन आहे.	....
3. या द्वितल कोनाचा ∠ ABC हा प्रतल कोन आहे.	B हा बिंदू, प्रतल E व प्रतल F यांच्या छेदनरेषा GH वर आहे. F प्रतलात किरण BA ⊥ रेषा GH व E प्रतलात किरण BC ⊥ रेषा GH ∴ प्रतल कोनांच्या व्याख्येवरून.
A4.∠ BC काटकोन आहे; म्हणजेच रेषा BC ⊥ रेषा BA.	....
5. पण रेषा BA ⊥ रेषा GH	....
6. रेषा BA ही, रेषा BC व रेषा GH. यांच्या E प्रतलास लंब आहे.	प्रतल व रेषा यांच्या लंबतेचे मूलभूत प्रमेय.

आपण काय शिकलो ?

(1) **संज्ञा–व्याख्या :**

समांतर प्रतले; द्वितल कोन; द्वितल कोनाची बाजू किंवा पृष्ठ; लंब प्रतले; द्वितल कोनाचे माप; द्वितल काटकोन.

(2) **प्रमेये :**

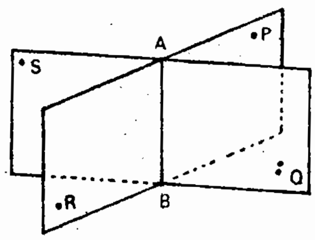
(i) दोन प्रतलांना छेदणाऱ्या प्रतलाच्या छेदनरेषा (ii) दोन समांतर प्रतलांपैकी एका प्रतलास लंब असणारी रेषा (iii) एकाच रेषेस लंब असणारी दोन प्रतले (iv) एकाच प्रतलाला लंब असणाऱ्या दोन रेषा (v) दोन समांतर प्रतलांमधील अंतर (vi) द्वितल कोनाचे प्रमेय (vii) दिलेल्या प्रतलास लंब असणाऱ्या रेषेतून जाणारे प्रतल (viii) लंब प्रतलांच्या छेदन-रेषेला, एका प्रतलात लंब असणारी रेषा.

(3) **उपप्रमेय :**

दोन समांतर रेषांपैकी एक रेषा एका प्रतलास लंब असेल तर दुसरी रेषाही लंब असणे.

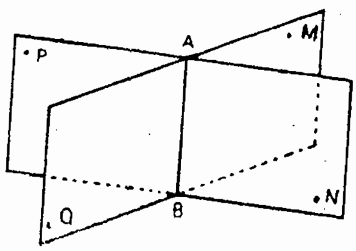
प्रश्नसंग्रह

1. खालील विधानांतील रिकाम्या जागी योग्य शब्द लिहून विधाने पूर्ण करा.
   (a) एक रेषा आणि ही रेषा ज्यांची ………… कडा आहे अशी दोन ………… अर्धप्रतले यांच्या ………… द्वितल कोन म्हणतात.
   (b) द्वितल कोनाचे माप म्हणजे त्याच्या कोणत्याही ………… माप होय.
   (c) दिलेल्या द्वितल कोनाचे कोणतेही दोन प्रतल कोन ……… असतात.
   (d) ज्या द्वितल कोनाचा प्रतलकोन ………… असतो त्या द्वितल कोनास द्वितल काटकोन म्हणतात.
   (e) दोन प्रतले एकमेकांशी ………… करीत असतील तर ती एकमेकांना लंब आहेत असे म्हणतात.



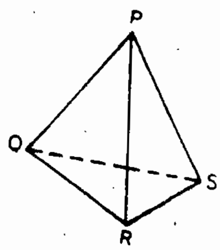
आ. 10·22

2. बाजूच्या आकृतीतील सर्व द्वितल कोनांची नावे सांगा.



आ. 10·23

3. बाजूच्या आकृतीत द्वितलकोन $\angle M-AB-N$ आणि द्वितल कोन $\angle P-AB-Q$ यांच्यात काय संबंध असेल ? का ?



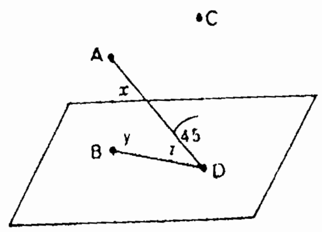
आ. 10·24

4. बाजूला त्रिकोणसूचीची आकृती दिली आहे. यात एकूण किती द्वितल कोन आहेत ?

5. दोन प्रतले एकमेकांना अशी छेदतात की होणाऱ्या द्वितल कोनांपकी एक द्वितल कोन काटकोन आहे. तर उरलेले द्वितल कोनही काटकोन असतील हे दाखवा.

6. परस्परांना छेदणाऱ्या दोन प्रतलांपैकी प्रत्येक एका तिसऱ्या प्रतलास लंब आहे. तर छेदणाऱ्या प्रतलांची छेदनरेषा तिसऱ्या प्रतलास लंब असेल हे दाखवा.

7. आ. 10·25 मध्ये रेषा AB आणि रेषा CD पैकी प्रत्येक रेषा प्रतल E ला लंब आहे; तर x, y, z च्या किंमती सांगा.



आ. 10·25

8. खालील विधानांपैकी कोणते विधान बरोबर व कोणते चूक आहे हे सांगा.

(a) दोन प्रतले एकाच रेषेस समांतर असतील तर ती परस्पर समांतर असतात.

(b) एकाच प्रतलाशी समांतर असणाऱ्या कोणत्याही दोन रेषा परस्पर समांतर असतात.

(c) एकाच प्रतलास लंब असणारी दोन प्रतले एकमेकांशी समांतर असतात.

(d) एका रेषेच्या एका बिंदूतून त्या रेषेला लंब असणाऱ्या दोन रेषा परस्पर लंब असल्याच पाहिजेत.

(e) एक प्रतल आणि त्या प्रतलात नसलेली एक रेषा दोन्ही एकाच प्रतलास लंब असतील तर ती परस्परांशी समांतर असतात.

(f) एक प्रतल आणि त्या प्रतलात नसलेली एक रेषा, दोन्ही एकाच रेषेस समांतर असतील तर ती परस्परांशी समांतर असतात.

(g) परस्परांना छेदणाऱ्या दोन प्रतलांपैकी एका प्रतलास छेदणारे प्रतल दुसऱ्या प्रतलास छेदत असलेच पाहिजे.

(h) दोन समांतर प्रतलांना एक प्रतल छेदत असेल तर छेदनरेषा परस्परांशी लंब असतात.

पारिभाषिक शब्द

द्वितलकोन – Dihedral angle

प्रतलकोन – Plane angle

द्वितल काटकोन – Right Dihedral angle

प्रकरण 11

क्षेत्रफळ

§ 11·1 क्षेत्रफळ या कल्पनेशी तुमची ओळख पूर्वी झालेली आहे. अंकगणितात 'भिंतींना रंग देण्याचा खर्च काढणे' या सारख्या उदाहरणांत तुम्ही क्षेत्रफळाचा विचार केलात. 'माझ्याजवळ 20 हेक्टर शेती आहे' असे जेव्हा आपण म्हणतो तेव्हा आपण त्या शेताचे (हेक्टर या परिमाणात) क्षेत्रफळच सांगत असतो. शेताच्या क्षेत्रफळाच्या साहाय्याने आपण त्या शेताने जमिनीचा किती भाग व्यापला आहे, हेच सांगतो. क्षेत्रफळ संख्येत सांगताना आपण बहुधा असे धरून चालतो की ज्या चौरसाची बाजू 1 माप आहे, त्या चौरसाचे क्षेत्रफळही 1 माप असते. अर्थात् क्षेत्रफळाचे माप हे लांबीरुंदीच्या मापापेक्षा वेगळे असते. उदा०, 1 मीटर लांबी-रुंदीच्या चौरसाचे क्षेत्रफळ 1 चौरस मीटर असते. चौरसाच्या क्षेत्रफळावरून आपण त्रिकोण, आयत इ० आकृतींची क्षेत्रफळे सांगू शकतो.

जर लांबीरुंदीचे माप बदलले तर त्याच आकृतीचे क्षेत्रफळ दाखवणारी संख्या बदलते. उदा०, 1 मीटर लांबी-रुंदीच्या चौरसाचे क्षेत्रफळ 1 चौरस मीटर असते, तसेच 10,000 चौरस सेमी असते. परंतु लांबी रुंदीचे माप कायम ठेवल्यास दिलेल्या आकृतीकरता क्षेत्रफळ दाखवणारी एक निश्चित वास्तव संख्या असते.

यावरून आपण म्हणू शकतो की एखादया आकृतीचे क्षेत्रफळ म्हणजे त्या आकृतीशी निगडित अशी एक निश्चित वास्तव संख्या असते.

§ 11·2 क्षेत्रफळासंबंधी जी माहिती तुम्हांला आतापर्यंत झालेली आहे, ती स्थूलमानाने वर दिली आहे. आता आपण क्षेत्रफळाचा अधिक काटेकोरपणे विचार करू.

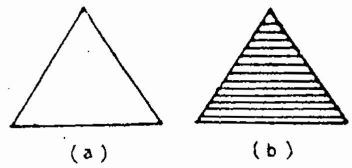
आपण प्रथम हे लक्षात ठेवले पाहिजे की क्षेत्रफळाची कल्पना ही एखादया **आकृतीकरता** लागू नसून त्या आकृतीने मर्यादित केलेल्या प्रतलाच्या भागाकरता लागू असते. उदा० त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ म्हणजे काय? त्रिकोणाची व्याख्या आपण कशी केली? त्रिकोण हा तीन विशिष्ट रेषाखंडांचा संयोग असतो. त्यामुळे, जसे आपण शेताच्या कुंपणाचे क्षेत्रफळ न म्हणता, त्या कुंपणाने मर्यादित केलेल्या जमिनीच्या भागाचे क्षेत्रफळ म्हणतो, तसेच त्रिकोणाच्या संदर्भात केवळ त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ असे न म्हणता, त्रिकोणाने मर्यादित केलेल्या प्रतलाच्या भागाचे क्षेत्रफळ म्हणावयास पाहिजे.

प्रतलातील एखादया आकृतीने मर्यादित केलेल्या प्रतलाच्या भागाला आपण क्षेत्र (region) म्हणणार आहोत. आकृती जशी त्रिकोणी, चौकोनी,...असेल त्याप्रमाणे त्या आकृतीने मर्यादित केलेल्या प्रतलाच्या भागाला त्रिकोणी क्षेत्र, चौकोनी क्षेत्र,...असे म्हणू. यांच्या व्याख्या पुढील पृष्ठावर दिल्या आहेत.

व्याख्या : त्रिकोणी क्षेत्र (triangular region)

दिलेला त्रिकोण व त्याचा अंतर्भाग यांच्या संयोगाला **त्रिकोणी क्षेत्र** म्हणतात.

आ. 11·1 (a) मध्ये त्रिकोण व (b) मध्ये त्रिकोणी क्षेत्र दाखवले आहे.

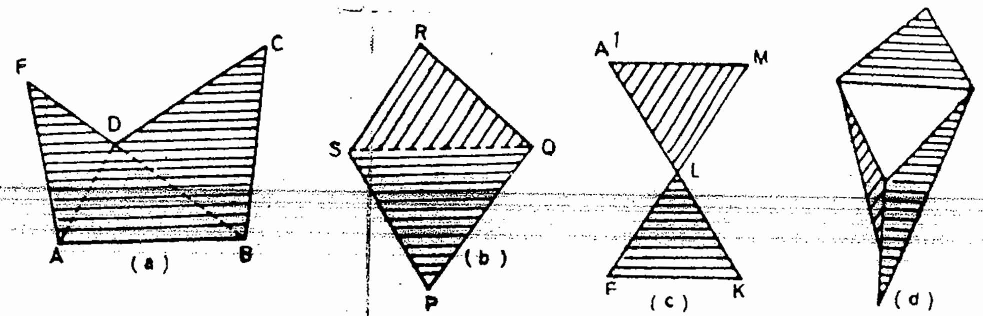


आ. 11·1

कोणताही त्रिकोण दिला असेल तर तो त्रिकोण व त्याचा अंतर्भाग मिळून त्रिकोणी क्षेत्र निश्चित होते. सोयीसाठी, $\triangle ABC$ ने निश्चित केलेल्या त्रिकोणी क्षेत्रासाठी देखील आपण $\triangle ABC$ हेच चिन्ह वापरू. $\triangle ABC$ हे चिन्ह त्रिकोणाकरता वापरले आहे की त्रिकोणी क्षेत्राकरता वापरले आहे, हे संदर्भावरून सहज लक्षात येईल.

§ 11·3 **बहुभुजाकृती क्षेत्र** (Polygonal Region) :

खालीलपैकी प्रत्येक आकृतीत प्रतलाचे काही भाग छायांकित करून दाखवले आहेत.



आ. 11·2

आकृतीतील छायांकित भागांची वैशिष्ट्ये कोणती आहेत ?

(i) प्रत्येक आकृतीतील छायांकित भाग हा काही त्रिकोणी क्षेत्रांचा संयोग आहे. (उदा. आ. 11·2 (a) मधील छायांकित भाग हा $\triangle ABD$, $\triangle DBC$ व $\triangle DAF$ या क्षेत्रांचा संयोग आहे.)

(ii) ही सर्व त्रिकोणी क्षेत्रे एकाच प्रतलात आहेत.

(iii) या त्रिकोणी क्षेत्रांपैकी दोन क्षेत्रे एकमेकांना छेदत असतील तर **त्यांचा छेद म्हणजे एखादा रेषाखंड किंवा एखादा बिंदूच असतो.** म्हणजेच, **यांपैकी कोणत्याही दोन क्षेत्रांचे अंतर्भाग एकमेकांस छेदत नाहीत.**

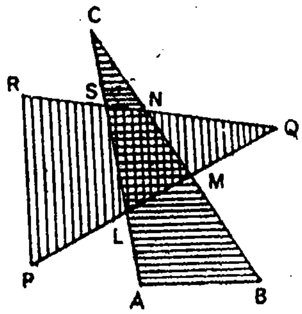
प्रतलाच्या या छायांकित भागांना **बहुभुजाकृती क्षेत्र** म्हणतात.

(iv) बहुभुजाकृती क्षेत्र हे ज्या त्रिकोणी क्षेत्रांचा संयोग असते त्या त्रिकोणी क्षेत्रांची संख्या सांतच असते असे आपण गृहीत धरतो.

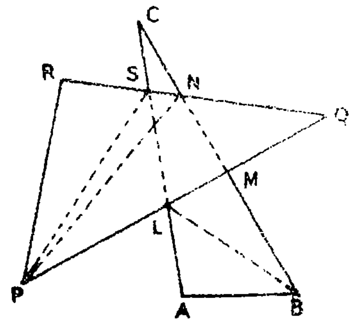
परस्परांना छेदणाऱ्या कोणत्याही दोन त्रिकोणी क्षेत्रांचा छेद म्हणजे एखादा रेषाखंड किंवा बिंदूच असतो असे नाही.

आ. 11·3 मधील △ PQR व △ ABC या क्षेत्रांचा छेद म्हणजे □ LMNS ने मर्यादित झालेले क्षेत्र होय. या ठिकाणी △ PQR व △ ABC यांचे अंतर्भाग एकमेकांस छेदतात.

परंतु △ ABC व △ PQR या क्षेत्रांच्या संयोगाला देखील बहुभुजाकृती क्षेत्र म्हणता येईल. कारण या क्षेत्रांचा संयोग हा, मागील पृष्ठावरील वैशिष्ट्ये [(i), (ii), (iii) व (iv)] असणाऱ्या **काही त्रिकोणी क्षेत्रांचा संयोग म्हणून** व्यक्त **करता येतो.**



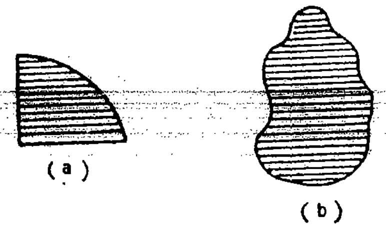
आ. 11·3



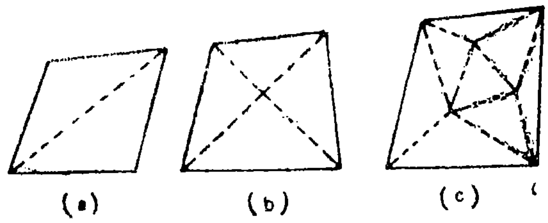
आ. 11·4

उदा०, आकृती 11·4 पाहा. या दोन त्रिकोणी क्षेत्रांचा संयोग हा △ PSR, △ PSN, △ CSN, △ NPM, △ NMQ, △ MLB, व △ LBA या क्षेत्रांचाही संयोग आहे. यांपैकी कोणत्याही दोन क्षेत्रांचे अंतर्भाग एकमेकांस छेदत नाहीत.

आ. 11·5 मध्ये प्रतलाचे काही भाग दाखवले आहेत त्यांना बहुभुजाकृती क्षेत्र म्हणता येणार नाही. कारण **ते संख्येने सांत त्रिकोणी क्षेत्रांच्या संयोगाच्या रूपात व्यक्त करता येत नाहीत.**



आ. 11·5



आ. 11·6

दिलेले बहुभुजाकृती क्षेत्र हे वेगवेगळ्या तऱ्हांनी त्रिकोणी क्षेत्रांचा संयोग म्हणून दाखवता येईल, हे आ. 11·6 वरून सहज दिसून येईल.

या प्रकरणात आपण फक्त बहुभुजाकृती क्षेत्रांचाच विचार करणार आहोत, त्यामुळे पुढील चर्चेत 'क्षेत्र' या शब्दाचा अर्थ 'बहुभुजाकृती क्षेत्र' असाच घ्यावा.

§ **11·4** या प्रकरणाच्या सुरुवातीच्या विवेचनात आपण पाहिले की क्षेत्रफळ हे दिलेल्या क्षेत्राशी **निगडित** अशी एक वास्तव संख्या असते. हीच गोष्ट खालील गृहीतकात सांगितली आहे.

गृहीतक 18 : क्षेत्रफळाचे गृहीतक (Area Postulate)

दिलेल्या कोणत्याही बहुभुजाकृती क्षेत्राशी एक आणि एकच धन वास्तव संख्या निगडित असते.

व्याख्या : एखादया क्षेत्राशी या गृहीतकाने निगडित झालेल्या (धन) वास्तव संख्येला त्या क्षेत्राचे **क्षेत्रफळ** (Area) म्हणतात.

जर दिलेले क्षेत्र R या चिन्हाने दाखवले, तर त्याचे क्षेत्रफळ आपण A (R) या चिन्हाने दाखवू.

या गृहीतकात सांगितल्याप्रमाणे एखादया भूमितीय कल्पनेचा वास्तव संख्येशी संबंध जोडण्याची या पुस्तकातली ही तिसरी वेळ आहे.

दिलेल्या रेषाखंडाशी एक वास्तव संख्या निगडित करून आपण तिला त्या रेषाखंडाची लांबी म्हणतो.

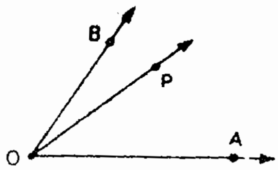
दिलेल्या कोनाशी एक वास्तव संख्या निगडित करून आपण तिला त्या कोनाचे माप म्हणतो.

त्याचप्रमाणे दिलेल्या क्षेत्राशी एक धन वास्तव संख्या निगडित करून आपण तिला त्या क्षेत्राचे क्षेत्रफळ म्हणतो.

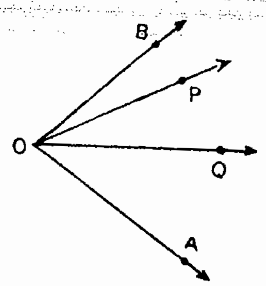
§ 11·5 क्षेत्रफळांची बेरीज :

प्रकरण 3 मध्ये कोनाच्या बेरजेचे गृहीतक पाहिले. या गृहीतकानुसार $\angle$ AOB च्या अंतर्भागात P हा एक बिंदू असेल (आ.11·7 पाहा) तर $m\angle AOP + m\, POB = m\angle AOB$.

या ठिकाणी आपण ज्या कोनांच्या मापांची बेरीज घेतो, त्या कोनांचे ($\angle$ AOP व $\angle$ BOP चे) अंतर्भाग एकमेकांना छेदत नाहीत.



आ. 11·7

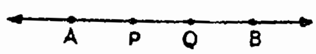


आ. 11·8

आता आ. 11·8 पाहा. आकृतीतील $\angle$ AOP व $\angle$ BOQ यांचे अंतर्भाग एकमेकांना छेदतात.

यावेळी $m\angle AOP + m\angle QOB \neq m\angle AOB$. म्हणजेच $\angle$ AOP व $\angle$ QOB यांच्या मापांची बेरीज $\angle$ AOB च्या मापाएवढी होत नाही.

रेषाखंडांच्या लांबीबाबतही अशीच परिस्थिती असते. उदा. आ. 11·9 मध्ये, रेख AP व रेख PB यांचे अंतर्भाग एकमेकांना छेदत नाहीत. (रेषाखंडाच्या अंत्यबिंदूंच्या दरम्यान असलेल्या बिंदूंच्या संचाला त्या रेषाखंडाचा अंतर्भाग म्हणतात.)



आ. 11·9

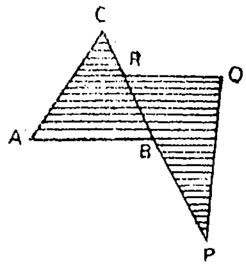
यावेळी, $l(AP) + l(PB) = l(AB)$.

परंतु, रेख AQ व रेख PB यांचे अंतर्भाग परस्परांस छेदतात व $l(AQ) + l(PB) \neq l(AB)$.

यावरून आपल्या लक्षात येईल की दोन कोन (किंवा रेषाखंड) यांना बेरजेचे तत्त्व लागू होण्याकरता दोन गोष्टी आवश्यक आहेत; (1) ते कोन (किंवा रेषाखंड) लगतचे असावेत.
(2) त्यांचे अंतर्भाग एकमेकांना छेदत नसावेत.

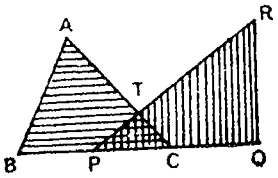
दोन क्षेत्रांच्या क्षेत्रफळांची बेरीज करताना देखील साधारण अशीच परिस्थिती असावी लागते.

आ. 11·10 मध्ये दाखवलेले क्षेत्र हे $\triangle ABC$ व $\triangle PQR$ यांचा संयोग आहे. या क्षेत्राचे क्षेत्रफळ $\triangle ABC$ व $\triangle PQR$ या क्षेत्रांच्या क्षेत्रफळांच्या बेरजेइतके होईल असे वाटते. कारण CRQPBA या आकृतीने व्यापलेला प्रतलाचा भाग हा $\triangle ABC$ व $\triangle PQR$ यांनी मिळून व्यापलेल्या प्रतलाच्या भागाएवढा आहे हे दिसून येते.



आ. 11·10

परंतु आ. 11·11 मध्ये दाखवलेले क्षेत्र हे $\triangle ABC$ व $\triangle PQR$ या क्षेत्रांचा संयोग असून त्याचे क्षेत्रफळ हे या दोन त्रिकोणी क्षेत्रांच्या क्षेत्रफळांच्या बेरजेइतके होणार नाही.



आ. 11·11

असा फरक पडण्याचे कारण म्हणजे आ. 11·10 मधील त्रिकोणी क्षेत्रांचे **अंतर्भाग** एकमेकांस छेदत नाहीत. (त्यांचा छेद म्हणजे फक्त रेखBR आहे) तर 11·11 मधील त्रिकोणी क्षेत्रांचे अंतर्भाग एकमेकांस छेदतात. (त्यांत क्षेत्रांचा छेद म्हणजे $\triangle TPC$ हे क्षेत्र आहे.)

या विवेचनातील सारांश खालील गृहीतकात सांगितला आहे.

गृहीतक 19 : क्षेत्रफळांच्या बेरजेचे गृहीतक

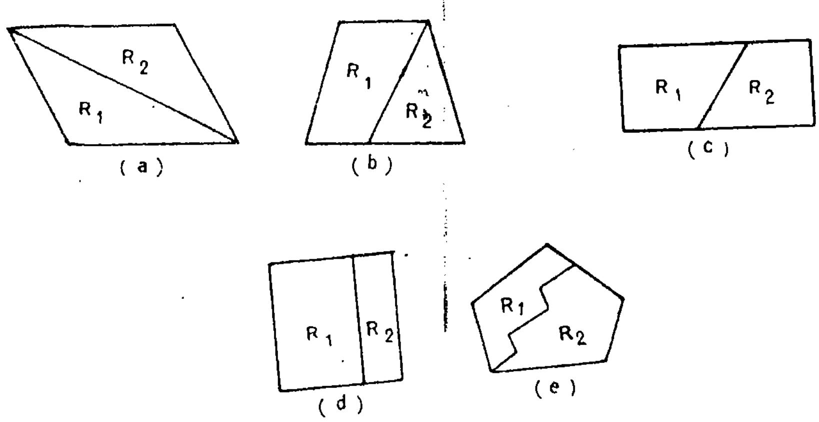
समजा क्षेत्र R हे R_1 व R_2 या दोन क्षेत्रांचा संयोग आहे, आणि R_1 व R_2 या क्षेत्रांच्या छेदसंचात केवळ सांतसंख्य रेषाखंड किंवा बिंदू आहेत तर R_1 व R_2 यांच्या क्षेत्रफळांची बेरीज ही R या क्षेत्राच्या क्षेत्रफळाएवढी असते.

क्षेत्रफळाचे चिन्ह वापरल्यास, या गृहीतकानुसार,

$$A(R_1) + A(R_2) = A(R).$$

या गृहीतकात सांगितल्याप्रमाणे बेरजेचे तत्व लागू होण्याकरता R_1 व R_2 यांच्या छेदसंचात फक्त रेषाखंड किंवा बिंदू असावे लागतात व त्यांची संख्या सांत असावी लागते. R_1 व R_2 यांचा छेद म्हणजे एखादे क्षेत्र असेल तर हे गृहीतक लागू होणार नाही.

खालीलपैकी प्रत्येक आकृतीत दिलेल्या क्षेत्राचे, काही रेषाखंडांच्या साहाय्याने, R_1 व R_2 या क्षेत्रांत विभाजन केलेले दाखवले आहे.



आ. 11·12

अशा प्रत्येक क्षेत्राकरता बेरजेचे गृहीतक लागू होते.

§ 11·6 एकरूप त्रिकोणांची क्षेत्रफळे :

दिलेल्या क्षेत्राचे क्षेत्रफळ हे ते क्षेत्र कसे आहे यावर अवलंबून असते; पण प्रतलात ते कुठे आहे यावर अवलंबून नसते. प्रतलात दोन वेगळ्या ठिकाणी दोन एकरूप त्रिकोण असतील तर त्यांची क्षेत्रफळे समान राहतील. कारण ते त्रिकोण एकरूप असल्याने प्रतलाचे सारखेच भाग व्यापतील. हीच गोष्ट खालील गृहीतकात सांगितली आहे.

गृहीतक 20 : एकरूपता व क्षेत्रफळांची समानता

जर दोन त्रिकोण एकरूप असतील तर त्यांच्या क्षेत्रांची क्षेत्रफळे समान असतात.

चिन्हात हे गृहीतक असे मांडता येईल.

जर $\triangle ABC \cong \triangle PQR$ तर $A(\triangle ABC) = A(\triangle PQR)$

दोन त्रिकोणांच्या क्षेत्रांची क्षेत्रफळे समान असतील तर त्यांना **समक्षेत्र त्रिकोण** म्हणतात.

या ठिकाणी एक मुद्दा पाहणे उद्बोधक ठरेल.

दोन कोनांची मापे समान असतील तर ते कोन एकरूप असतात, तसेच दोन रेषाखंडांची लांबी समान असेल तर ते एकरूप असतात. म्हणजे कोन किंवा रेषाखंड यांच्या मापांवरून आपण त्यांच्या एकरूपतेची व्याख्या करतो. याउलट, वरील गृहीतकानुसार, दोन त्रिकोण एकरूप असतील तर ते समक्षेत्र असतात, पण जर दोन त्रिकोण समक्षेत्र असतील तर ते एकरूप असतीलच असे नाही.

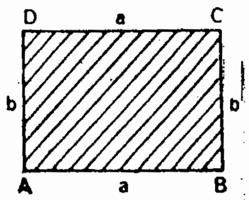
§ 11·7 काटकोन चौकोनाचे क्षेत्रफळ :

आता आपण काही विशिष्ट प्रकारच्या क्षेत्रांची क्षेत्रफळे कशी निश्चित करता येतील ते पाहू. क्षेत्रफळाच्या व्याख्येनुसार एखादया क्षेत्राचे क्षेत्रफळ हे त्या क्षेत्राशी निगडित अशी एक (धन) वास्तव संख्या असते. परंतु दिलेल्या क्षेत्राशी निगडित असलेली ही संख्या मिळवायची असेल तर आधी एखादया विशिष्ट क्षेत्राचे क्षेत्रफळ हे विशिष्ट संख्या आहे असे गृहीत धरावे लागेल. त्यानंतरच इतर क्षेत्रांची क्षेत्रफळे कशी काढता येतील ते पाहता येईल.

त्या करता आपण, काटकोन चौकोनी क्षेत्राचे क्षेत्रफळ हे त्याच्या लगतच्या बाजूंच्या लांबींच्या गुणाकारा-एवढे असते, हे गृहीत धरणार आहोत.

गृहीतक 21 : काटकोन चौकोनी क्षेत्राचे गृहीतक

काटकोन चौकोनी क्षेत्राचे क्षेत्रफळ हे त्याच्या लगतच्या दोन बाजूंच्या लांबींच्या गुणाकाराएवढे असते.



आ. 11·13

□ ABCD हा काटकोन चौकोन असून

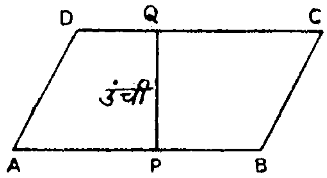
$l(AB) = a$ व $l(BC) = b$ असेल

तर $A(\square ABCD) = a \cdot b$

§ 11·8 (a) आता यापुढे आपण 'काटकोन चौकोनी क्षेत्राचे क्षेत्रफळ' ऐवजी फक्त 'काटकोन चौकोनाचे क्षेत्रफळ' असा सोपा शब्दप्रयोग करू. त्यामुळे क्षेत्रफळाच्या संदर्भात प्रत्येक वेळी 'क्षेत्र' हा शब्द वापरण्याची गरज नाही. तसेच 'बाजूची लांबी' ऐवजी फक्त 'बाजू' असा शब्द वापरू.

या संकेतानुसार, वरील गृहीतक असेही लिहिता येईल.

'काटकोन चौकोनाचे क्षेत्रफळ हे त्याच्या लगतच्या दोन बाजूंच्या गुणाकाराएवढे असते.'



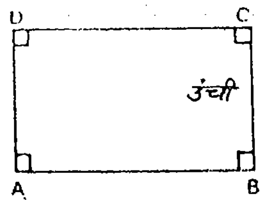
आ. 11·14

(b) समजा □ ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे. क्षेत्रफळासाठी आपण त्याच्या कोणत्याही एका बाजूला **पाया** (Base) म्हणू. या बाजूसमोरील, त्या चौकोनाच्या बाजूवरील एखाद्या बिंदूपासून पायावर लंब काढलेल्या रेषाखंडाला त्या चौकोनाची **उंची** (Altitude) म्हणू.

पाया व उंची हे रेषाखंड असले तरी सोयीसाठी आपण त्यांच्या लांबीकरिताही अनुक्रमे पाया व उंची हेच शब्द वापरू.

उदा० आ. 11·14 मध्ये □ ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे; या चौकोनाची बाजू AB किंवा l(AB) यांना आपण पाया म्हणतो व रेख PQ किंवा l(PQ) यांना उंची म्हणतो.

या ठिकाणी आपण 'पाया' व 'उंची' या संज्ञा रेषाखंडाकरता, तसेच रेषाखंडाच्या लांबीकरताही वापरल्या आहेत. त्या संज्ञा कोणत्या संदर्भात वापरल्या आहेत, त्यावरून त्यांचे अर्थ (रेषाखंड की लांबी) स्पष्ट होतील.



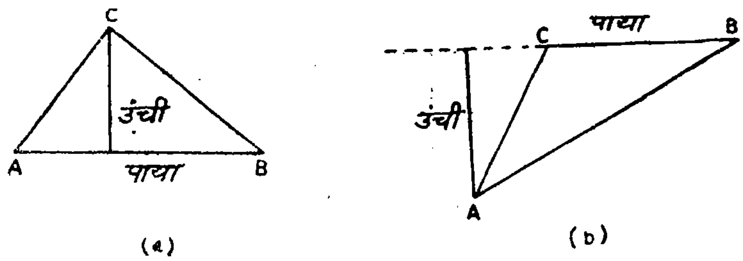
आ. 11·15

आता काटकोन चौकोन हाही विशिष्ट प्रकारचा समांतरभुज चौकोन असल्यामुळे त्याच्याकरताही या संज्ञा लागू होतील. परंतु, काटकोन चौकोनाच्या लगतच्या बाजू परस्परांस लंब असल्यामुळे, त्या काटकोन चौकोनाची कोणतीही बाजू पाया घेतल्यास त्या बाजूलगतची बाजू ही त्या काटकोन चौकोनाची उंची होईल. म्हणून वरील गृहीतकानुसार

का. को. चौकोनाचे क्षेत्रफळ = पाया × उंची.

(c) त्रिकोणाच्या बाबतीतही आपण त्या त्रिकोणाच्या कोणत्याही एका बाजूला 'पाया' म्हणू व या पायावर, त्याच्या समोरील कोनबिंदूपासून काढलेल्या शिरोलंबाला त्या त्रिकोणाची उंची म्हणू.

चौकोनाप्रमाणेच या ठिकाणी, पाया व उंची या रेषाखंडांच्या लांबीकरताही आपण अनुक्रमे 'पाया' व 'उंची' हेच शब्द वापरू.



आ. 11·16

काही विशिष्ट क्षेत्रांची क्षेत्रफळे

आता आपण काही विशिष्ट क्षेत्रांची क्षेत्रफळे काढू.

§ 11·9 ▪ प्रमेय :

चौरसाचे क्षेत्रफळ हे त्याच्या बाजूच्या लांबीच्या वर्गाएवढे असते.

चौरस हा सर्व बाजू एकरूप असलेला काटकोन चौकोन असल्यामुळे त्याचा पाया व उंची समान असतात. यावरून हे प्रमेय लगेच सिद्ध होऊ शकते.

§ 11·10 ▪ प्रमेय :

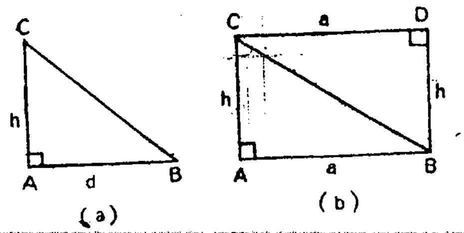
काटकोन त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ हे त्याचा काटकोन समाविष्ट करणाऱ्या बाजूंच्या लांबीच्या गुणाकाराच्या निम्मे असते.

पक्ष : $\triangle ABC$ मध्ये $\angle A$ काटकोन असून $l(AB)=a$ व $l(AC)=h$

साध्य : $A(\triangle ABC)=\frac{1}{2}\,a\cdot h$

सिद्धता : $\triangle ABC$ च्या C शिरोबिंदूतून, रेषा AB ला समांतर रेषा काढा. तसेच B मधून रेषा AC ला समांतर रेषा काढा. समजा या रेषा D बिंदूत छेदतात. त्यामुळे $\square$ ABDC हा काटकोन चौकोन होईल.

तसेच, समजा, $A(\triangle ABC)=S$



आ. 11·17

1. आता, $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ (काटकोन चौकोनाचा कर्ण जोडून मिळणारे त्रिकोण)
2. $\therefore A(\triangle ABC)=A(\triangle DCB)=S$ (गृहीतक 20—एकरूपता व क्षेत्रफळांची समानता)
3. आता, $A(\triangle ABC)+A(\triangle DCB)=A(\square ABCD)$ (क्षेत्रफळाच्या बेरजेचे गृहीतक)
4. $\therefore S+S=A(\square ABCD)=a\cdot h$ (विधान 2 व काटकोन चौकोनी क्षेत्राचे गृहीतक)
5. $\therefore 2S=a\cdot h$
6. $\therefore S=\frac{1}{2}\,a\cdot h$

§ 11·11 ▪ प्रमेय :

कोणत्याही त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ हे त्याच्या पाया व उंची यांच्या लांबींच्या गुणाकाराच्या निम्मे असते.

पक्ष : $\triangle ABC$ मध्ये बाजू BC हा पाया आहे व रेख AD हा A पासून पाया BC वर काढलेला शिरोलंब आहे $l(BC)=a$ व $l(AD)=h$

साध्य : $A(\triangle ABC)=\frac{1}{2}\,a\cdot h$

सिद्धता : रेख AD हा, A पासून पाया BC वर काढलेला शिरोलंब आहे.
या ठिकाणी आपल्याला तीन पर्यायांचा विचार करावा लागेल.

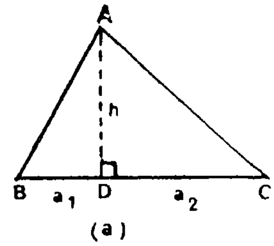
1. D बिंदू हा रेख BC चा अंत्य बिंदू असेल,

2. D बिंदू हा B व C च्या दरम्यान असेल [आ. 11·18 (a) पाहा],

3. किंवा D बिंदू हा रेषा BC वर असेल, पण बाजू BC वर नसेल. [आ. 11·18 (b) पाहा.]

(1) जर $\angle B$ किंवा $\angle C$ काटकोन असेल तर D हा, B किंवा C या रेख BC च्या अंत्यबिंदूशी जुळेल. पण काटकोन त्रिकोणाचा विचार आपण आधीच केलेला आहे. त्यामुळे हा पर्याय विचारात घेण्याचे कारण नाही.

(2) समजा, D हा B व C यांच्या दरम्यान आहे.



आ. 11·18 (a)

समजा, $l(BD)=a_1$ व $l(DC)=a_2$

$\therefore$ दरम्यानतेवरून, $l(BD)+l(DC)=l(BC)$

म्हणजेच $a_1+a_2=a$. .... (i)

आता क्षेत्रफळांच्या बेरजेच्या गृहीतकानुसार,

$A(\triangle BDA)+A(\triangle ADC)=A(\triangle ABC)$...(ii)

परंतु, $\triangle BDA$ व $\triangle ADC$ हे का. को. त्रिकोण आहेत.

$\therefore$ प्रमेय 11·10 वरून, $A(\triangle BDA)=\frac{1}{2}a_1h$ व $A(\triangle ADC)=\frac{1}{2}a_2h$

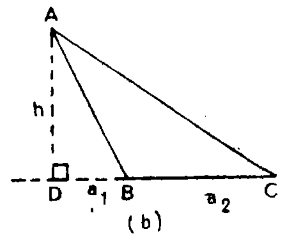
$\therefore$ (ii) वरून, $A(\triangle ABC)=\frac{1}{2}a_1h+\frac{1}{2}a_2h$

$=\frac{1}{2}(a_1+a_2)h$

$=\frac{1}{2}a\cdot h$........[(i) वरून]

(3) आता समजा D हा बाजू BC वर नाही. (अर्थात, तो रेषा BC वर आहे.) म्हणजे B हा D व C यांच्या दरम्यान राहील किंवा C हा B व D यांच्या दरम्यान राहील.

समजा, B हा D व C यांच्या दरम्यान आहे. (आ. 11·18 (b))



आ. 11·18 (b)

समजा $l(DC)=a_2$ व $l(BD)=a_1$

दरम्यानतेवरून,

$l(DB)+l(BC)=l(DC)$

$\therefore a_1+a=a_2$

$\therefore a=a_2-a_1$ ... (iii)

आता क्षेत्रफळांच्या बेरजेच्या गृहीतकानुसार,

$A(\triangle ADB)+A(\triangle ABC)=A(ADC)$ ...(iv)

परंतु $\triangle ADB$ व $\triangle ADC$ हे का. को. त्रिकोण आहेत.

$\therefore$ प्रमेय 11·10 वरून, $A(\triangle ADB)=\frac{1}{2}a_1h$, $A(\triangle ADC)=\frac{1}{2}a_2h$.

$\therefore$ (iv) वरून, $\frac{1}{2}a_1h+A(\triangle AEC)=\frac{1}{2}a_2h$.

$\therefore A(\triangle ABC)=\frac{1}{2}a_2h-\frac{1}{2}a_1h$

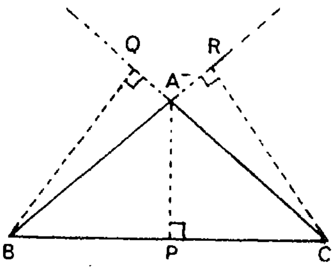
$=\frac{1}{2}(a_2-a_1)h$

$=\frac{1}{2}a\cdot h$........[(iii) वरून]

यांवरून वरील प्रमेय सिद्ध झाले.

§ 11·12 ▪ **प्रमेय :**

त्रिकोणाची कोणतीही बाजू व तिच्या समोरील शिरोबिंदूपासून त्या बाजूवर काढलेला शिरोलंब, यांच्या लांबींचा गुणाकार सारखाच असतो.



आ. 11·19

समजा, $\triangle ABC$ मध्ये $l(AB)=c$; $l(BC)=a$ व $l(CA)=b$ आहे.

तसेच $l(AP)=p$, $l(BQ)=q$ व $l(CR)=r$ आहे.

आता प्रमेय 11·11 वरून,

$A(\triangle ABC)=\frac{1}{2}\,a\cdot p=\frac{1}{2}\,b\cdot q=\frac{1}{2}\,c\cdot r$

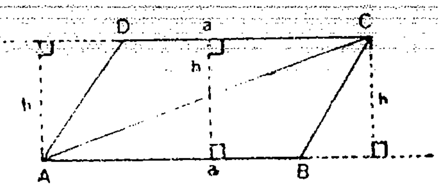
यावरून, $a\cdot p=b\cdot q=c\cdot r$, हे सिद्ध होते.

§ 11·13 ▪ **प्रमेय :**

समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ हे त्याचा पाया व उंची यांच्या गुणाकाराएवढे असते.

पक्ष : □ ABCD हा समांतरभुज चौकोन असून त्याचा पाया a आहे व उंची h आहे. (आ. 11·20 पाहा.)

साध्य : $A(\square ABCD)=a\cdot h$



आ. 11·20

सिद्धता :

□ ABCD चा कर्ण AC घ्या.

□ ABCD हा समांतरभुज असल्यामुळे

$\triangle ABC \cong \triangle CDA$

$\therefore A(\triangle ABC)=A(\triangle CDA)$

पण $\triangle ABC$ चा पाया a असून उंची h आहे, तसेच $\triangle CDA$ चा पाया a असून उंची h आहे.

∴ प्रमेय 11·11 वरून

$A(\triangle ABC)=A(\triangle CDA)=\frac{1}{2}\,a\cdot h$

आता क्षेत्रफळांच्या बेरजेच्या गृहीतकावरून,

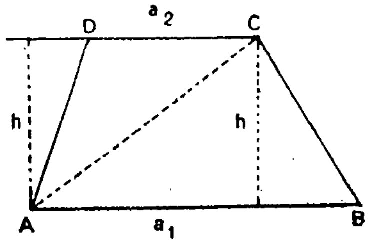
$A(\triangle ABC)+A(\triangle CDA)=A(\square ABCD)$

$\therefore A(\square ABCD)=\frac{1}{2}\,ah+\frac{1}{2}\,ah=ah$

§ 11·14 ■ प्रमेय :

समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ हे त्याच्या समांतर बाजूंच्या लांबीची बेरीज व त्या बाजूंतील लंबांतर यांच्या गुणाकाराच्या निम्मे असते.

सिद्धता : समजा, □ABCD समलंब आहे. म्हणजेच त्याच्या समोरासमोरील बाजूंची एक जोडी समांतर आहे.



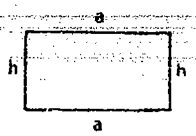
आ. 11·21

समजा, बाजू AB ∥ बाजू DC,
$l(AB)=a_1,\ l(DC)=a_2$
आणि बाजू AB व बाजू CD यांच्यातील लंबांतर h आहे.

क्षेत्रफळाच्या बेरजेच्या गृहीतकानुसार,

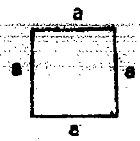
$$A(\square ABCD)=A(\triangle ADC)+A(\triangle ACB)$$
$$=\tfrac{1}{2}a_1 h+\tfrac{1}{2}a_2 h \qquad \text{[प्रमेय 11·11]}$$
$$=\tfrac{1}{2}(a_1+a_2)h$$

§ 11·15 वरील प्रमेयांचे निष्कर्ष एकत्रितपणे खाली दिले आहेत.

1. 

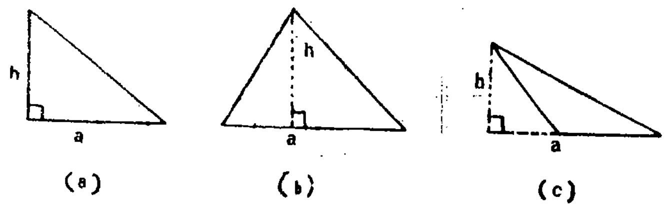
काटकोन चौकोनाचे क्षेत्रफळ $=ah$

आ. 11·22



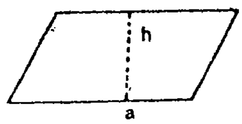
चौरसाचे क्षेत्रफळ $=a^2$

आ. 11·23

3. 

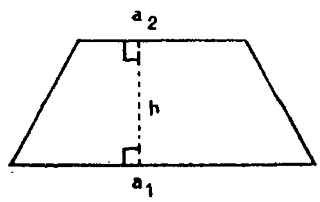
त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ $=\frac{1}{2}\,a\,h$

आ. 11·24

4. 

समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ $=ah$

आ. 11·25

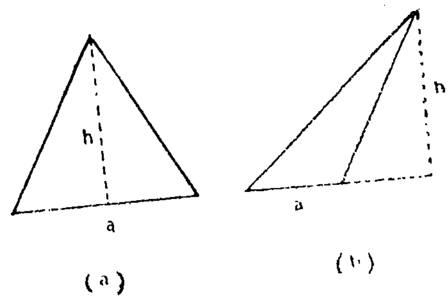


आ. 11·26

5. समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ $=\frac{1}{2}(a_1+a_2)\,h$

§ 11·16 ▪ प्रमेय :

समान पायांच्या व समान उंचीच्या त्रिकोणांची क्षेत्रफळे समान असतात.

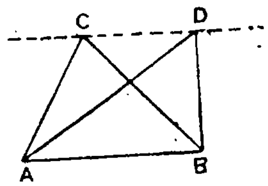


आ. 11·27

हे प्रमेय, प्रमेय 11·12 वरून लगेच मिळते.

उपप्रमेय (1)

जर दोन त्रिकोणात एक बाजू समाईक असून, या बाजूसमोरील त्यांच्या शिरोबिंदूतून जाणारी रेषा या बाजूला समांतर असेल, तर त्या त्रिकोणांची क्षेत्रफळे समान असतात.



आ. 11·28

आ. 11·28 मध्ये

$\triangle ABC$ व $\triangle ABD$ यांत बाजू AB समाईक आहे.

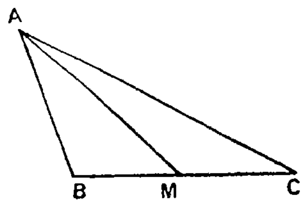
रेषा CD || बाजू AB.

∴ C व D यांची, रेषा AB पासूनची अंतरे समान आहेत म्हणून या प्रमेयानुसार,

$A(\triangle ABC) = A(\triangle ABD)$.

उपप्रमेय (2)

जर $\triangle ABC$ च्या बाजू BC चा M हा मध्यबिंदू असेल तर $\triangle AMB$ व $\triangle AMC$ यांची क्षेत्रफळे समान असतात.



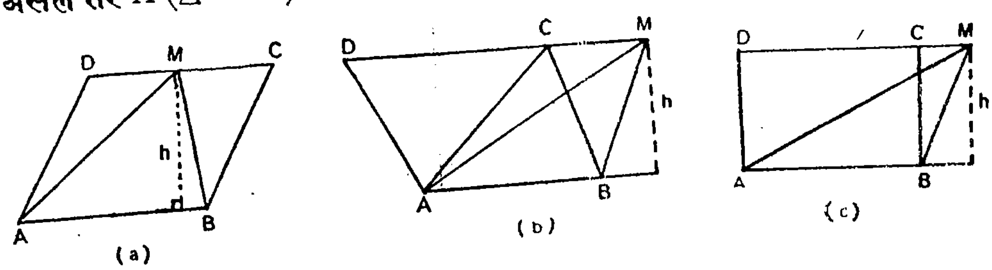
आ. 11·29

$\triangle ABC$ मध्ये M हा, बाजू BC चा मध्यबिंदू असेल तर रेख AM ला $\triangle ABC$ ची **मध्यगा** (Median) म्हणतात. शिरोबिंदू B व C यांमधूनही मध्यगा काढता येतील.

म्हणून, या उपप्रमेयानुसार त्रिकोणाची मध्यगा त्या त्रिकोणाचे दोन समक्षेत्र त्रिकोणांत विभाजन करते.

§ 11·17 ▪ प्रमेय :

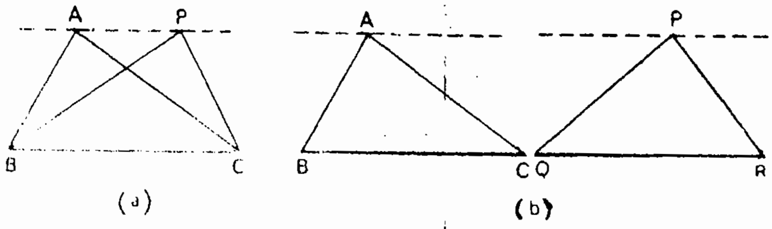
□ABCD हा समांतरभुज चौकोन असून रेषा CD वर M हा कोणताही बिंदू असेल तर $A(\triangle AMB) = \frac{1}{2} A(\square ABCD)$



आ. 11·30

वरील □ABCD व $\triangle ABM$ यांचा पाया AB समाईक आहे व दोघांचीही उंची समान आहे यावरून वरील प्रमेय लगेच मिळते.

§ **11·18** जर दोन त्रिकोणांचे पाये एकाच रेषेत असतील व त्या पायांच्या समोरील शिरोबिंदू समाविष्ट करणाऱ्या रेषेला पायांची रेषा समांतर असेल, तर ते त्रिकोण **'समांतर रेषांच्या एकाच जोडीत बद्ध आहेत'** असे म्हणतात. अशा वेळी त्यांची उंची सारखी असते.

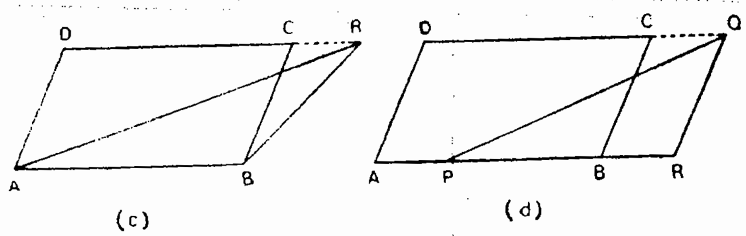


आ. 11·31

आ. 11·31 (a) मध्ये, △ ABC व △ PBC, आणि आ. 11·31 (b) मध्ये, △ ABC व △ PQR हे एकाच समांतर रेषांच्या एकाच जोडीत बद्ध आहेत.

म्हणून, आपण म्हणू शकतो की 'जर दोन त्रिकोणांच्या पायांची लांबी समान असेल व ते एकाच समांतर रेषांच्या जोडीत बद्ध असतील तर त्या त्रिकोणांची क्षेत्रफळे समान असतात.'

त्याचप्रमाणे एखादा समांतरभुज चौकोन व एखादा त्रिकोण यांचे पाये एकाच रेषेत असतील व त्रिकोणाच्या पायासमोरील शिरोबिंदू, समांतरभुज चौकोनाच्या पायासमोरील (समांतर) बाजूला समाविष्ट करणाऱ्या रेषेवर असेल तर, ते त्रिकोण व चौकोन समांतर रेषांच्या जोडीत बद्ध आहेत असे म्हणतात. अर्थात, अशा वेळी त्यांची उंची सारखी असते.



आ. 11·31

आपण काय शिकलो ?

(1) **संज्ञा-व्याख्या :**

त्रिकोणी क्षेत्र; बहुभुजाकृती क्षेत्र; क्षेत्रफळ.

(2) **कल्पना :**

क्षेत्रफळांची बेरीज; समांतर रेषांच्या जोडीत बद्ध असलेल्या आकृती.

(3) **गृहीतक :**

(i) क्षेत्रफळाचे गृहीतक (ii) क्षेत्रफळांची बेरीज (iii) एकरूपता व क्षेत्रफळांची समानता (iv) काटकोन चौकोनाचे क्षेत्रफळ.

(4) **प्रमेये :**

(i) चौरसाचे क्षेत्रफळ (ii) त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ (iii) त्रिकोणाची कोणतीही बाजू व तिच्या समोरील शिरोबिंदूपासून त्या बाजूवर काढलेले शिरोलंब यांचा गुणाकार (iv) समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ (v) समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ (vi) समान पायांच्या व समान उंचीच्या त्रिकोणांची क्षेत्रफळे (vii) एकाच पायावर असणाऱ्या व समान उंचीच्या समांतरभुज चौकोनाचे व त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ.

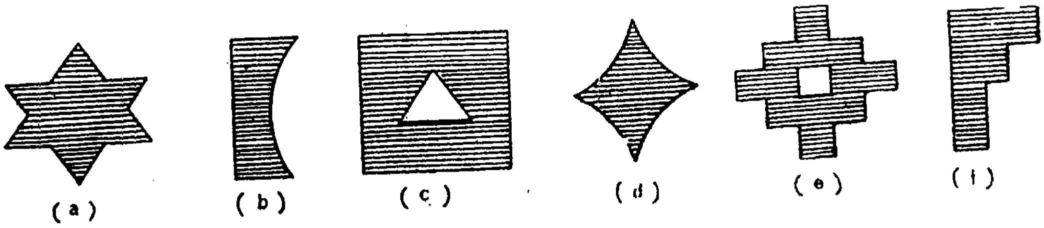
उपप्रमेये :

(i) समाईक पाया असणाऱ्या त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूतून जाणारी रेषा पायास समांतर असेल तर त्या त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांतील संबंध.

(ii) त्रिकोणाच्या एका बाजूच्या मध्यबिंदूस समोरील शिरोबिंदूला सांधणाऱ्या रेषेमुळे होणाऱ्या दोन त्रिकोणांची क्षेत्रफळे.

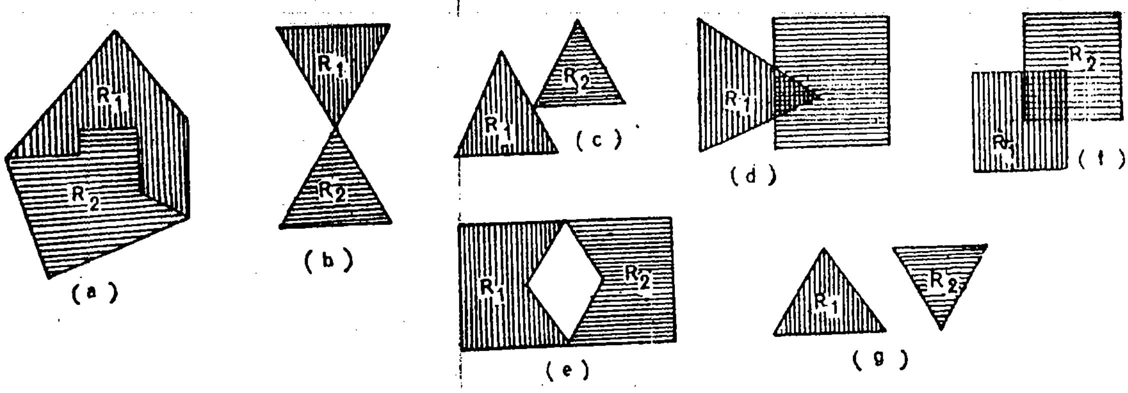
प्रश्नसंग्रह

1. खालील आकृतींत छायांकित करून दाखवलेले कोणते भाग बहुभुजाकृती क्षेत्र आहेत ते सांगा.



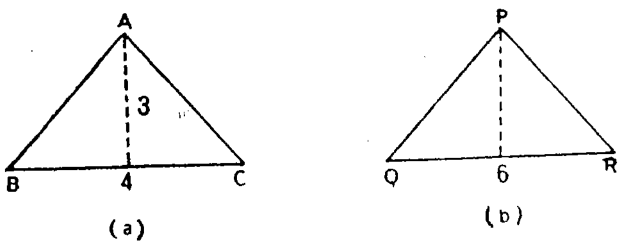
आ. 11-32

2. खालीलपैकी प्रत्येक आकृतीत R_1 क्षेत्र उभ्या रेषांनी व R_2 क्षेत्र आडव्या रेषांनी दाखवले आहे. समजा, $R = R_1 \cup R_2$ तर कोणत्या आकृतींकरता क्षेत्रफळांच्या बेरजेचे तत्त्व—
$A(R_1) + A(R_2) = A(R)$ खरे ठरेल ?



आ. 11-33

3. (a) $\triangle ABC$ मध्ये पाया $= 4$ व उंची $= 3$ असेल तर $\triangle ABC$ चे क्षेत्रफळ काढा.



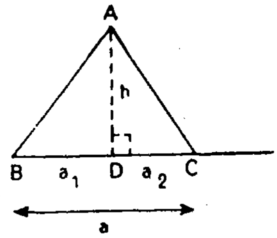
आ. 11-34

(b) जर $A(\triangle ABC) = A(\triangle PQR)$ असेल व $\triangle PQR$ चा पाया 6 असेल तर उंची काढा.

4. खाली काही काटकोन चौकोनांच्या लगतच्या बाजूंच्या लांबी दिल्या आहेत. त्यांवरून त्यांची क्षेत्रफळे काढा.

(a) 3 व 8 (b) 24 व 17 (c) $2\frac{3}{4}$ व $\frac{4}{11}$
(d) $(x-2)$ व 3 (e) $(x-2)$ व $(x+2)$.

5. $\triangle$ ABC मध्ये, $l(BC)=a$
$l(BD)=a_1$, $l(DC)=a_2$
व $l(AD)=h$



आ. 11·35

यावरून खालील प्रश्नांतील माहिती भरा.

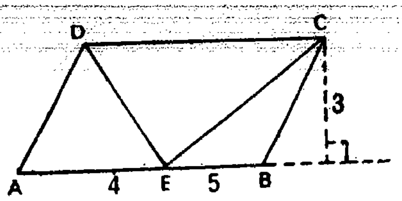
(i) $a_1=3$, $a_2=5$, $h=4$, तर $A(\triangle ABC)=?$
(ii) $a_1=2$, $a=8$, $h=5$, तर $A(\triangle ADC)=?$
(iii) $A(\triangle ABC)=96$, $h=12$, $a_1=4$, तर $a_2=?$
(iv) $a=8$, $A(\triangle BDA)=A(\triangle ADC)$
तर $a_1=?$, $a_2=?$

6. एका चौरसाचे क्षेत्रफळ 14400 आहे. तर त्याची परिमिती (सर्व बाजूंच्या लांबींची बेरीज) काढा.

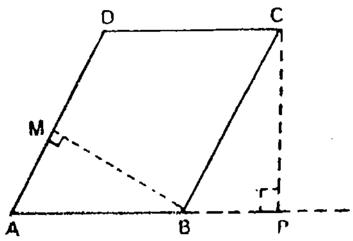
7. एका काटकोन चौकोनाचे क्षेत्रफळ 240 असून त्याचा पाया हा उंचीच्या दीडपट आहे. तर त्याचा पाया व उंची काढा.

8. एका काटकोन चौकोनी खोलीचे क्षेत्रफळ 288 आहे. त्या खोलीला 2×2 च्या फरशा बसवायच्या असल्यास किती फरशा लागतील ?

9. $\square$ ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे. तर आ. 11·36 मध्ये दिलेल्या माहितीवरून त्याचे क्षेत्रफळ काढा.



आ. 11.36

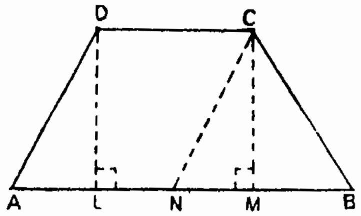


आ. 11·37

10. $\square$ ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे.
रेख CP $\perp$ रेषा AB व रेख BM $\perp$ रेषा AD.

(a) जर $l(AB)=8$, $l(CP)=12$, $l(BC)=16$ असेल, तर $l(BM)=?$
(b) $l(BM)=12$, $l(DC)=8$, $l(CP)=12$ असेल, तर $l(AD)=?$
(c) $A(\square ABCD)=112$, $l(AB)=7$, तर $l(CP)=?$
(d) $l(CP)=8$, $A(\triangle BPC)=16$, $l(AB)=6$, तर $l(AP)=?$

11. $\square$ ABCD हा समलंब चौकोन आहे. आ. 11·38 पाहा. बाजू AB $\parallel$ DC व रेख CN $\parallel$ बाजू AD.
$l(DC)=l(CM)=h$
(a) $l(AB)=16$, $l(DC)=12$, $h=8$ असेल,
तर $A(\square ABCD)=?$



आ. 11·38

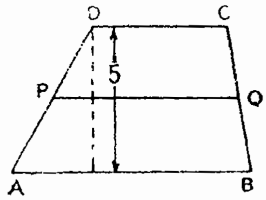
(b) l (AB) = 12, l (CD) = 8,
A (□ ABCD) = 192, तर h = ?

(c) l (AB) = 15, h = 5,
A (□ ABCD) = 60, तर l (CD) = ?

(d) l (CD) = 8, h = 6, l (BN) = 9,
तर A (□ ABCD) = ?

(e) l (CD) = 9, h = 5,
A (△ CBN) = 20, तर l (AB) = ?

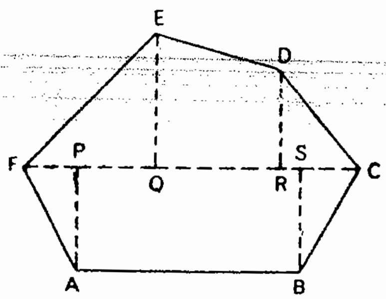
12. □ ABCD समलंब आहे. P व Q हे अनुक्रमे बाजू AD व बाजू BC यांचे मध्यबिंदू आहेत. (आ. 11·39) जर l (PQ) = 8 व उंची = 5 असेल तर A (□ ABCD) काढा.



आ. 11·39

13. जर □ ABCD हा बहिर्वक्र चौकोन असून त्याचे कर्ण एकमेकांस लंब असतील तर त्या चौकोनाचे क्षेत्रफळ त्याच्या कर्णांच्या लांबींच्या गुणाकाराच्या निम्मे असते हे सिद्ध करा.

14. एका समभुज चौकोनाच्या कर्णांची लांबी अनुक्रमे 8 व 12 आहेत. तर त्याचे क्षेत्रफळ काढा.



आ. 11·40

15. एका शेतकऱ्याजवळ, आ. 11·40 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे, एक पंचकोनी शेत आहे. त्या शेताचे क्षेत्रफळ काढण्यासाठी त्याने F व C हे कोपरे जोडले. रेषा FC वर AP, BS, EQ व DR हे लंब काढले व खालील दिलेली अंतरे काढली.

l (FP) = 3, l (PQ) = 5, l (QR) = 7,
l (RS) = 1, l (SC) = 3, l (AP) = 5,
l (EQ) = 6, l (DR) = 4 व l (BS) = 5.

यावरून त्याने आपल्या शेताचे क्षेत्रफळ काढले. तुम्ही या शेताचे क्षेत्रफळ कसे काढाल ?

16. □ ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे. P, Q, R, S हे अनुक्रमे बाजू AB, बाजू BC, बाजू CD व बाजू DA यांचे मध्यबिंदू आहेत. सिद्ध करा की,
A (□ PQRS) = $\frac{1}{2}$ A (□ ABCD)

17. कोणत्याही त्रिकोणाच्या बाजूंचे मध्यबिंदू जोडून मिळणाऱ्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ हे मूळ त्रिकोणाच्या $\frac{1}{4}$ असते; हे सिद्ध करा.

पारिभाषिक शब्द

उंची – Altitude
पाया – Base
बहुभुजाकृती – Polygon
बहुभुजाकृती क्षेत्र – Polygonal Region
मध्यगा – Median
क्षेत्र – Region
क्षेत्रफळ – Area

प्रकरण 12

पायथॅगोरसचे प्रमेय

§ 12·1 काटकोन त्रिकोणात कर्णावरील चौरसाचे क्षेत्रफळ हे इतर दोन बाजूंवरील चौरसांच्या क्षेत्रफळांच्या बेरजेएवढे असते.

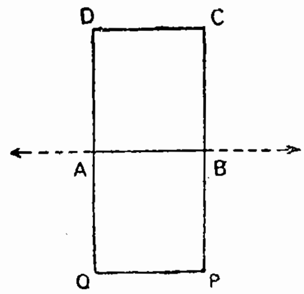
म्हणजेच, $\triangle$ ABC मध्ये $\angle$ C काटकोन असून $l(AB)=c$, $l(BC)=a$ व $l(AC)=b$ असेल तर $c^2=a^2+b^2$.

काटकोन त्रिकोणाच्या या गुणधर्माला पायथॅगोरसचे प्रमेय म्हणतात. भूमितीतील अत्यंत उपयुक्त व प्रसिद्ध प्रमेयांत याची गणना होते. ख्रिस्तपूर्व 6 व्या शतकात होऊन गेलेल्या पायथॅगोरस या गणितज्ञाने हे प्रमेय प्रथम सिद्ध केले असे साधारणतः मानले जाते. परंतु या प्रमेयात सांगितलेला गुणधर्म, पायथॅगोरसच्या काळाच्या फार पूर्वीपासून ईजिप्शियन, चिनी व भारतीय अभ्यासकांना माहीत होता. '3, 4 व 5 लांबीच्या दोरांपासून काटकोन त्रिकोण तयार करता येतो' असे शुल्वसूत्रात सांगितले आहे.

§ 12·2 पायथॅगोरसच्या प्रमेयाच्या आतापर्यंत कित्येक सिद्धता दिल्या गेल्या आहेत. प्रस्तुत प्रकरणात आपण या प्रमेयाच्या दोन सिद्धता देणार आहोत.

सिद्धता देण्यापूर्वी, 'एखादया रेषाखंडावरील चौरस' म्हणजे काय हे आपण पाहू.

समजा, रेख AB हा एक रेषाखंड दिला आहे. या रेषाखंडातून जाणाऱ्या कोणत्याही प्रतलात आ. 12·1 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे, रेख AB ही ज्यांची एक भुजा होईल असे □ABCD व □ABPQ हे दोन चौरस काढता येतात.



आ. 12·1

या चौरसांचे **अंतर्भाग** रेषा AB च्या विरुद्ध अर्धप्रतलांत असतात. (चौरसाच्या सर्व कोनांच्या अंतर्भागात असतील अशा सर्व बिंदूंच्या संचाला चौरसाचा अंतर्भाग म्हणतात.) या चौरसांना 'रेख AB' वरील चौरस म्हणतात. त्रिकोणाची बाजू ही एक रेषाखंडच असल्यामुळे, त्रिकोणाच्या एखादया बाजूवरील चौरस म्हणजे काय हे आता स्पष्ट होईल.

आता आपण वरील प्रमेयाची सिद्धता देऊ. सोयीसाठी हे प्रमेय पुन्हा खाली दिले आहे.

§ 12·3 ▪ पायथॅगोरसचे प्रमेय :

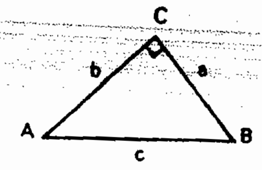
काटकोन त्रिकोणात, कर्णावरील चौरसाचे क्षेत्रफळ हे त्या त्रिकोणाच्या इतर दोन बाजूंवरील चौरसांच्या क्षेत्रफळांच्या बेरजेएवढे असते.

म्हणजेच △ ABC मध्ये ∠ C काटकोन असून $l(AB)=c$, $l(BC)=a$ व $l(AC)=b$ असेल तर $c^2=a^2+b^2$.

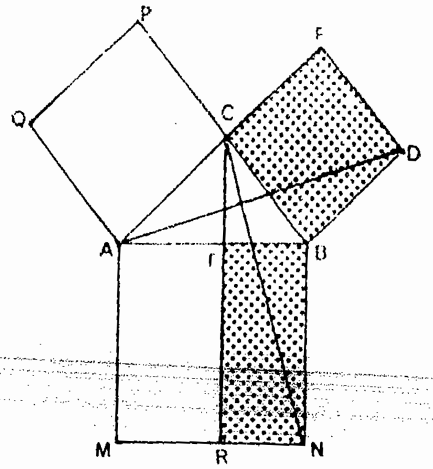
(या प्रकरणात आपण △ ABC च्या बाजू BC, बाजू CA व बाजू AB यांच्या लांबी अनुक्रमे a, b व c या चिन्हांनी दाखवू.)

हे प्रमेय आपण दोन पद्धतींनी सिद्ध करू. यांपैकी पहिली सिद्धता युक्लिडने प्रथम वापरली होती. ती साधारणपणे 'तीन चौरसांची सिद्धता' म्हणून ओळखली जाते.

पक्ष : △ ABC मध्ये ∠ C काटकोन आहे. □ ABNM, □ BCFD व □ ACPQ हे अनुक्रमे बाजू AB, बाजू BC व बाजू AC यांवरील चौरस आहेत.



(a)



(b)

आ. 12·2

साध्य : A (□ ABNM) = A (□ BCFD) + A (□ ACPQ).

रचना : पक्षात सांगितलेले, △ ABC च्या बाजूवरील चौरस असे घ्या की त्यांतील कोणत्याही चौरसाचा **अंतर्भाग,** △ ABC च्या अंतर्भागाला छेदणार नाही.

∠ ACB व ∠ BCF हे लगतचे कोन काटकोन असल्यामुळे A, C व F हे बिंदू एकाच रेषेवर आहेत.

C या काटकोन बिंदूतून कर्ण AB ला लंब असलेली रेषा घ्या. समजा, ही रेषा, कर्ण AB ला व बाजू MN ला अनुक्रमे T व R या बिंदूत छेदते.

[या प्रमेयाच्या सिद्धतेत आपण मुख्य कोणते मुद्दे घेणार आहोत हे आधी पाहू.

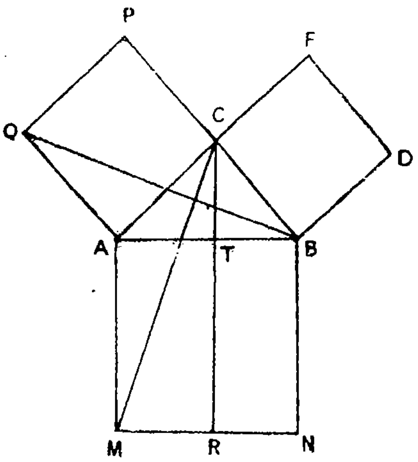
C या काटकोन बिंदूतून कर्ण AB ला लंब काढलेल्या रेषा CR मुळे कर्ण AB वरील चौरसाचे, □ TRNB व □ TRMA या दोन आयतात विभाजन होते. यांपैकी पहिल्या आयताचे क्षेत्रफळ हे बाजू BC वरील चौरसाच्या क्षेत्रफळाएवढे असते व दुसऱ्या आयताचे क्षेत्रफळ हे बाजू AC वरील चौरसाच्या क्षेत्रफळाएवढे असते हे आपण सिद्ध करू.

या दोन आयतांच्या क्षेत्रफळांची बेरीज, □ ABMN या चौरसाच्या क्षेत्रफळाएवढी असल्यामुळे, हे प्रमेय लगेच सिद्ध होईल.

आता, आयत BNRT व चौरस BCFD यांची क्षेत्रफळे समान कशी होतात ते पाहा. पहिल्या आयताचे क्षेत्रफळ हे △ BNC च्या क्षेत्रफळाच्या दुप्पट आहे. कारण बाजू BN ही त्यांचा समाईक पाया असून ते समांतर रेषांच्या जोडीत बद्ध आहेत. त्याचप्रमाणे चौरस BCFD चे क्षेत्रफळ हे △ BDA च्या क्षेत्रफळाच्या दुप्पट आहे. आता △ BNC व △ BDA एकरूप आहेत असे दाखवले म्हणजे आपल्याला हवा असलेला मुद्दा सिद्ध होईल.]

सिद्धता :

1. △ ABD व △ NBC विचारात घ्या.
   बाजू AB ≅ बाजू NB } ...(एकाच चौरसाच्या बाजू एकरूप असतात.)
   बाजू BD ≅ बाजू BC }
   व ∠ ABD ≅ ∠ NBC (प्रत्येक कोनाचे माप = 90 + m ∠ ABC)
   ∴ △ ABD ≅ △ NBC ...(बाकोबा गृहीतक)
2. ∴ A (△ ABD) = A (△ NBC) ...(एकरूपता व क्षेत्रफळांची समानता)
3. आता A (△ ABD) = $\frac{1}{2}$ A (□ BDFC). (या त्रिकोण व चौकोनात पाया BD समाईक आहे व ते समान उंचीचे आहेत.)
4. तसेच, A (△ NBC) = $\frac{1}{2}$ A (□ BNRT), (पाया BN समाईक व समान उंची)
5. A (□ BDFC) = A (□ BNRT). ...(विधाने 2, 3 व 4 वरून)
   याचप्रमाणे, △ CAM व △ QAB एकरूप आहेत हे दाखवून आपल्याला सिद्ध करता येईल की
6. A (□ ACPQ) = A (□RTAM).
7. परंतु, A (□ ABNM) = A(□BNRT) + A (□RTAM).
   (क्षेत्रफळाच्या बेरजेचे गृहीतक)
8. ∴ A ((□ ABNM) = A (□ BDFC) + A (□ACPQ)
   (विधाने 6 व 7 वरून)
   हेच आपल्याला सिद्ध करावयाचे होते.



(c)

आ. 12·2

टीप : विधान 6 ची सिद्धता, पायऱ्या 1 ते 5 प्रमाणे, तपशीलाने लिहून पाहा.

आता हेच प्रमेय आपण दुसऱ्या पद्धतीने सिद्ध करू. या पद्धतीत, त्रिकोणाच्या बाजूंवरील प्रत्यक्ष चौरस न घेता, आपण त्या प्रमेयात सांगितलेले बैजिक सूत्र सिद्ध करतो.

पक्ष : △ ABC मध्ये ∠ C काटकोन आहे.

साध्य : $c^2 = a^2 + b^2$

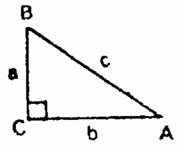
सिद्धता : $a+b$ लांबी असलेल्या बाजूंचा चौरस PQRS घ्या. या चौरसांच्या बाजूंवर L, M, N व K हे बिंदू असे घ्या की

$l\,(PL) = l\,(QM) = l\,(RN) = l\,(SK) = a$

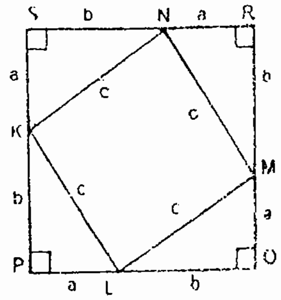
त्यामुळे,

$l\,(LQ) = l\,(MR) = l\,(NS) = l\,(KP) = b$.

आता, बाकोबा गृहीतकावरून आकृतीत दाखवलेले चारही त्रिकोण, △ ABC शी एकरूप आहेत. त्यामुळे, प्रत्येक त्रिकोणाच्या कर्णाची लांबी c आहे हे दिसून येते.



(a)



(b)

आ. 12·3

आता $m\,\angle PLK + m\,\angle PKL = 90$ असल्यामुळे,

∠ PLK व ∠ QLM कोटिकोन होतात. म्हणून ∠ KLM हा काटकोन आहे.

म्हणजेच □ KLMN हा चौरस आहे.

या चौरसाचे क्षेत्रफळ c^2 आहे व वरील प्रत्येक काटकोन त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ $\frac{1}{2}\,a\cdot b$ आहे.

आता क्षेत्रफळांच्या बेरजेच्या गृहीतकानुसार, आकृतीमधील मोठ्या चौरसाचे क्षेत्रफळ हे, लहान चौरसाचे क्षेत्रफळ व या चार काटकोन त्रिकोणांची क्षेत्रफळे यांच्या बेरजेएवढे आहे.

$\therefore\ (a+b)^2 = c^2 + 4\cdot\frac{1}{2}\cdot ab$

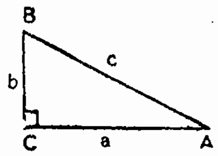
$\therefore\ a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$

$\therefore\ a^2 + b^2 = c^2$.

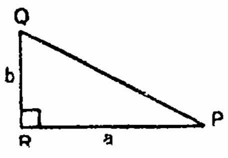
पायथगोरस प्रमेयानुसार △ ABC मध्ये, ∠ C काटकोन असेल तर $c^2 = a^2 + b^2$. या प्रमेयाचा व्यत्यास काय होईल? 'जर $c^2 = a^2 + b^2$ असेल तर ∠ C काटकोन असतो' हा व्यत्यास देखील सत्य असतो हे आता आपण सिद्ध करू.

§ 12·4 ▪ प्रमेय : पायथॅगोरसच्या प्रमेयाचा व्यत्यास

एखाद्या त्रिकोणात जर एका बाजूच्या लांबीचा वर्ग, त्या त्रिकोणाच्या उरलेल्या बाजूंच्या लांबींच्या वर्गांच्या बेरजेएवढा असेल तर तो त्रिकोण काटकोन त्रिकोण असतो.



(a)



(b)

आ. 12·4

पक्ष : △ ABC मध्ये $c^2 = a^2 + b^2$

साध्य : △ ABC काटकोन त्रिकोण आहे.

सिद्धता : △ PQR हा असा एक त्रिकोण घ्या की $l\,(PR) = a$, $m\,\angle R = 90$ व $l\,(QR) = b$.

समजा $l\,(PQ) = d$.

$\triangle PQR$ हा काटकोन त्रिकोण असल्यामुळे, $d^2 = a^2 + b^2$.

पण, पक्षानुसार, $c^2 = a^2 + b^2$.

$\therefore d = c$.

$\therefore$ बाबाबा गृहीतकानुसार, $\triangle PQR \cong \triangle ABC$.

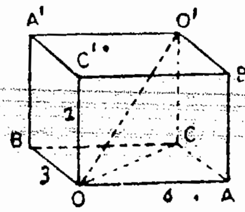
$\therefore \angle R \cong \angle C$

पण $\angle R$ काटकोन आहे $\therefore \angle C$ काटकोन आहे.

$\therefore \triangle ABC$ हा काटकोन त्रिकोण आहे.

टीप : $\triangle ABC$ मध्ये $c^2 = a^2 + b^2$ असेल तर $\angle C$ काटकोन असतो हे आपण सिद्ध केले. $\triangle ABC$ च्या बाजूंपैकी बाजू BC ही सर्वात मोठी बाजू आहे, हे a, b, c मधील दिलेल्या संबंधावरून दिसून येते. यावरून त्रिकोणाच्या बाजूंच्या लांबीत वरील संबंध दिला असेल तर सर्वात मोठ्या बाजूसमोरील कोन काटकोन असतो हे तुमच्या लक्षात येईल.

§ 12·5 **उदाहरण :** आकृतीत दाखवलेल्या काटकोनी ठोकळ्याच्या OA, OB व OC′ या कडांच्या लांबी अनुक्रमे 6, 3 व 2 आहेत. तर त्याच्या OO′ या कर्णाची लांबी काढा.



आ. 12·5

उत्तर : $\triangle OAC$ मध्ये, $\angle A$ काटकोन असून

$l(OA) = 6$ व $l(AC) = 3$

$\therefore [l(OC)]^2 = 6^2 + 3^2 = 45$.

आता कडा O′C ही OACB या प्रतलास लंब आहे.

$\therefore$ रेख $O'C \perp$ रेख OC

$\therefore \triangle OCO'$ मध्ये, $\angle OCO'$ काटकोन असून

$l(OC) = \sqrt{45}$ व $l(CO') = 2$.

$\therefore [l(OO')]^2 = 45 + 4 = 49$. $\therefore l(OO') = 7$.

कर्ण OO′ ची लांबी 7 आहे.

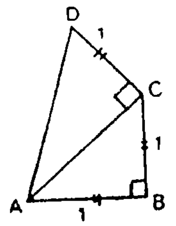
§ 12·6 **प्रश्न :**

1. $\triangle ABC$ मध्ये $\angle C$ काटकोन आहे.
   (i) जर $a = 3$, $b = 4$ असेल, तर $c = ?$
   (ii) जर $a = 5$, $c = 8$ असेल, तर $b = ?$
   (iii) जर $b = 5$, $c = 13$ असेल, तर $a = ?$

2. एक मनुष्य एका ठिकाणापासून 2 किमी उत्तरेकडे गेला व तिथून 4 किमी पूर्वेकडे गेला. तर तो आपल्या सुरवातीच्या ठिकाणापासून किती दूर राहील ?

3. 5 मीटर लांबीची एक शिडी एका भिंतीला टेकवून ठेवली आहे. शिडीचे जमिनीवरचे टोक भिंतीपासून 2 मीटरवर असेल तर तिचे दुसरे टोक जमिनीपासून किती उंचीवर असेल ?

4. आ. 12·6 मध्ये $l(AB) = l(BC) = l(CD) = 1$ असून $\angle ABC$ व $\angle ACD$ काटकोन आहेत. तर $l(AD)$ काढा.



आ. 12·6

5. खालीलपैकी कोणत्या परिस्थितीत $\triangle ABC$ काटकोन त्रिकोण राहील ते सांगा व कोणता कोन काटकोन असेल ते सांगा.

(i) $a=3,\ b=5,\ c=3.$

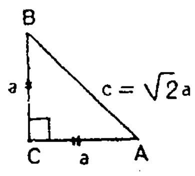
(ii) $a=5,\ b=4,\ c=3.$

(iii) $a=8,\ b=6,\ c=10.$

(iv) $a=4,\ b=9,\ c=12.$

§ 12·7 ▪ प्रमेय :

समद्विभुज काटकोन त्रिकोणात कर्णाची लांबी, त्या त्रिकोणाच्या एकरूप बाजूंपैकी एका बाजूच्या लांबीच्या $\sqrt{2}$ पट असते.



आ. 12·7

पायथॅगोरसच्या प्रमेयावरून हे प्रमेय लगेच मिळते.

एखादया काटकोन त्रिकोणाचे लघुकोन 30 व 60 या मापाचे असतील तर त्याची 30 मापाच्या कोनासमोरील बाजू कर्णाच्या निम्मी असते हे आपण प्रकरण 10 मध्ये पाहिले. तसेच, 60 मापाच्या कोनासमोरील बाजूचा कर्णाशी काय संबंध आहे हे पायथॅगोरसच्या प्रमेयाचा उपयोग करून सांगता येते.

§ 12·8 ▪ प्रमेय :

कोणत्याही 30–60–90 त्रिकोणात, 60 मापाच्या कोनासमोरील बाजूची लांबी ही कर्णाच्या लांबीच्या $\sqrt{\frac{3}{2}}$ पट असते.

सिद्धता :

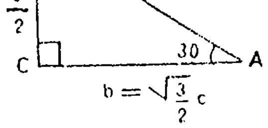
$\triangle ABC$ मध्ये, $\angle C$ काटकोन असून $m\angle A = 30$ व $m\angle B = 60$ आहे असे समजा.

$\therefore a = \dfrac{c}{2}$

$\therefore \left(\dfrac{c}{2}\right)^2 + b^2 = c^2$

$\therefore\ b^2 = c^2 - \dfrac{c^2}{4} = \dfrac{3c^2}{4}$

$\therefore b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}c$



आ. 12·8

एखादया काटकोन त्रिकोणाच्या बाजू परिमेय संख्या असतात त्या काटकोन त्रिकोणाला परिमेय त्रिकोण म्हणतात. अर्थात त्या सर्व संख्यांच्या छेदांच्या ल. सा. वि. ने त्यांना गुणल्यास पूर्णांकच मिळत असल्याने आपल्याला पूर्णांक बाजू असलेला काटकोन त्रिकोण मिळू शकतो. पूर्णांक बाजू असलेले काटकोन त्रिकोण मिळवण्याचा प्रश्न फार मनोरंजक आहे.

m^2+n^2, $|m^2-n^2|$, $2mn$ ह्या राशीतील m व n यांच्या जागी (धन) पूर्णांक घालून आपल्याला पूर्णांक बाजू असलेले काटकोन त्रिकोण मिळवता येतात. कारण

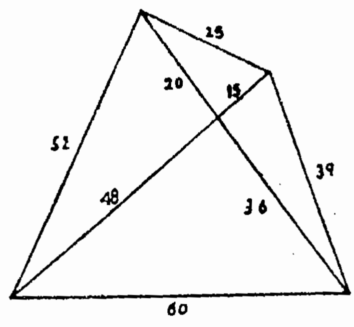
$$(m^2+n^2)^2=(m^2-n^2)^2+(2mn)^2$$

शुल्व (800 – 500 इ. स. पू.), **बौद्धायन** (800 इ. स. पू.), **आपस्तंभ** आणि **कात्यायन** (500 इ. स. पू.), यांना $z^2=x^2+y^2$ या समीकरणाची पूर्णांक उत्तरे माहित होती असे दिसते.

a, b, c ह्या (पूर्णांक) संख्या काटकोन त्रिकोणाच्या बाजू असतील तर l ह्या कोणत्याही पूर्णांकाकरता la, lb, lc ह्या संख्यांनीही काटकोन त्रिकोण मिळतो असे **गणेश** (इ. स. 1545) म्हणतो.

ज्याच्या बाजू व कर्ण पूर्णांक आहेत असे चौकोन मिळवण्याची पद्धत **ब्रम्हगुप्ताने** (इ. स. 628) दिली आहे. त्या चौकोनांना बम्हगुप्त चौकोन म्हणतात. $|m^2-n^2|(p^2+q^2)$, $|p^2-q^2|(m^2+n^2)$, $2mn(p^2+q^2)$, $2pq(m^2+n^2)$ ह्या राशीतील m, n, p, q यांच्या जागी (धन) पूर्णांक लिहून ($m \neq n$, $p \neq q$) आपल्याला ब्रम्हगुप्त चौकोनाच्या बाजू मिळतात. तसेच $2mn\,|p^2-q^2|+2pq\,|m^2-n^2|$ व $4mnpq+|p^2-q^2|.|m^2-n^2|$ या राशींवरून या चौकोनाचे कर्ण मिळतात.

आकृती 12·9 मध्ये $m=2$, $n=1$, $p=3$ व $q=2$ घेऊन मिळणारा एक चौकोन काढून दाखवला आहे. या चौकोनाचे कर्ण एकमेकांना छेदून चार काटकोन त्रिकोण मिळतात.



आ. 12·9

या चौकोनांचे आणखी एक वैशिष्ट्य असे की, यांच्या सर्व शिरोबिंदूतून एक वर्तुळ जाऊ शकते. (अशा चौकोनांना चक्रीय चौकोन म्हणतात.)

आपण काय शिकलो ?

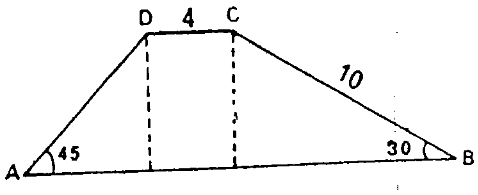
प्रमेय :

(i) पायथॅगोरसचे प्रमेय व त्याचा व्यत्यास. (ii) समद्विभुज काटकोन त्रिकोणाचे प्रमेय.

(iii) समद्विभुज काटकोन त्रिकोणाच्या कर्णाची लांबी. (iv) 30–60–90 त्रिकोणांच्या बाजूंची लांबी.

प्रश्नसंग्रह

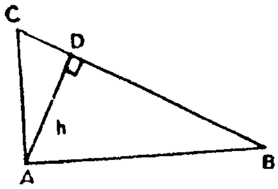
1. एखादया चौरसाच्या बाजूंची लांबी a असेल तर त्याच्या कर्णाची लांबी काढा.
2. एका चौरसाच्या कर्णाची लांबी $10\sqrt{2}$ आहे. तर त्याच्या बाजूंची लांबी काढा.
3. $\triangle$ ABC मध्ये $b=c=10$. तर खालील प्रत्येक परिस्थितीत त्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ काढा.
   (i) $m\angle B = m\angle C = 45$
   (ii) $m\angle B = 60$
   (iii) $m\angle C = 30$



आ.12·10

4. $\square$ABCD समलंब चौकोन आहे.
   बाजू CD $\parallel$ बाजू AB
   $m\angle A = 45$ व $m\angle B = 30$
   $l(DC) = 4$ व $l(BC) = 10$
   तर $\square$ ABCD चे क्षेत्रफळ काढा.

5. खालील माहितीवरून $\triangle$ ABC च्या कोनांची मापे सांगा.
   (i) $a=3,\ b=3,\ c=3$
   (ii) $a=4,\ b=2,\ c=2\sqrt{3}$
   (iii) $a=\sqrt{2}\ ,\ b=\sqrt{2}\ ,\ c=2$

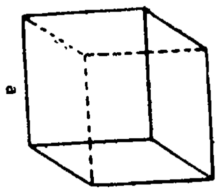


आ. 12·11

6. $\triangle$ ABC मध्ये, $b=6$, $c=8$, $\angle$ CAB काटकोन व रेख AD $\perp$ रेख BC.
   तर $\triangle$ ABC चे क्षेत्रफळ व $l(AD)$ काढा.

7. आ. 12·11 मध्ये $l(CD)=9$, $l(BD)=11$ असल्यास $l(AD)$ काढा.

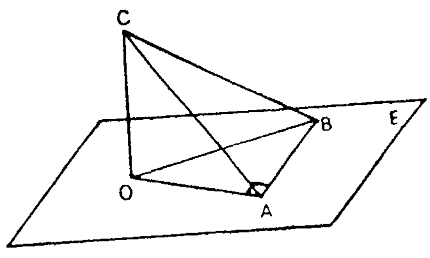
8. एक मनुष्य एका ठिकाणापासून 10 किमी दक्षिणेला गेला. नंतर तो 14 किमी पूर्वेला गेला व नंतर 6 किमी उत्तरेला गेला. तर तो आपल्या सुरुवातीच्या ठिकाणापासून किती अंतरावर राहील?



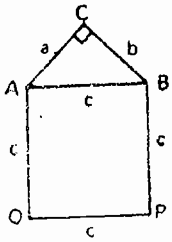
आ. 12·12

9. एका घनाकृतीच्या कडांची लांबी a आहे, तर त्याच्या कर्णाची लांबी काढा. (आ. 12·12)

10. रेख CO हा E प्रतलास, O या ठिकाणी, लंब आहे. या प्रतलात $\triangle$OAB असून $\angle$ A काटकोन आहे. जर $l(OA)=5$, $l(AB)=8$ व $l(OC)=6$ असेल तर $l(BC)$ काढा.



आ. 12·13

11. 

आ. 12·14

$\triangle ABC$ मध्ये $b = a$ व $\angle C$ काटकोन आहे. $\square ABPQ$ हा कर्ण AB वरील चौरस आहे.

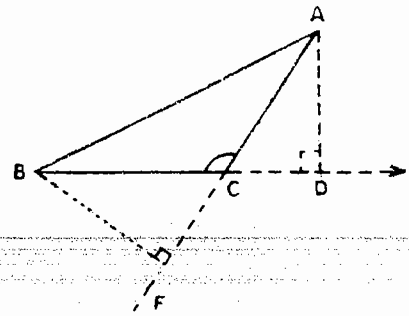
सिद्ध करा,

$A(\square ABPQ) = 4\, A(\triangle ABC)$

12. एका समभुज त्रिकोणाच्या बाजूची लांबी a आहे, तर त्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$ असते हे सिद्ध करा.

13. काटकोन त्रिकोणात, कर्णावरील समभुज त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ हे त्याच्या इतर दोन बाजूंवरील समभुज त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांच्या बेरजेएवढे असते, हे सिद्ध करा.

14. $\triangle ABC$ मध्ये, $\angle C$ हा विशाल कोन आहे.
रेख AD $\perp$ रेषा BC व रेख BF $\perp$ रेषा AC.
तर सिद्ध करा की,



आ. 12·15

(i) $[l(AB)]^2 = [l(AC)]^2 + [l(BC)]^2 + 2[l(BC)]\cdot[l(CD)]$

(ii) $[l(AB)]^2 = [l(AC)]^2 + [l(BC)]^2 + 2[l(AC)]\cdot[l(CF)]$

सिद्धता : आपण, विधान (i) सिद्ध करू.

$\angle C$ विशालकोन असल्यामुळे, C बिंदू, B व D यांच्या दरम्यान असतो.

$\therefore l(BD) = l(BC) + l(CD)$ ....(1)

आता, $\triangle ADB$ हा काटकोन त्रिकोण आहे.

$\therefore [l(AB)]^2 = [l(BD)]^2 + [l(AD)]^2$ ....(2)

$\therefore$ (1) चा उपयोग करून

$[l(AB)]^2 = [l(BC) + l(CD)]^2 + [l(AD)]^2$

$= [l(BC)]^2 + 2[l(BC)][l(CD)] + [l(CD)]^2 + [l(AD)]^2$.........(3)

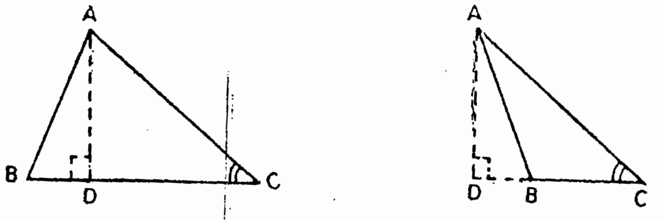
पण, $\triangle ADC$ हा काटकोन त्रिकोण असल्यामुळे,

$[l(CD)]^2 + [l(AD)]^2 = [l(AC)]^2$.........(4)

$\therefore$ (3) व (4) वरून, वरील विधान (i) सहज सिद्ध होईल.

त्याचप्रमाणे, विधान (ii) सिद्ध करा.

15. $\triangle$ ABC मध्ये $\angle$ C लघुकोन आहे. रेख AD $\perp$ रेषा BC.



(a) (b)

आ. 12·16

तर सिद्ध करा की,

$[l(AB)]^2=[l(AC)]^2+[l(BC)]^2-2[l(BC)][l(CD)]$.

सिद्धता : जर $\angle$B लघुकोन असेल तर D बिंदू, B व C यांच्या दरम्यान असतो. आणि जर $\angle$ B विशालकोन असेल तर B बिंदू, D व C यांच्या दरम्यान असतो.

समजा $\angle$ B लघुकोन आहे. (आ. 12·16 (a) पाहा)

आता $\triangle$ ADB हा काटकोन त्रिकोण आहे.

$\therefore [l(AB)]^2=[l(AD)]^2+[l(BD)]^2$ ······(1)

D हा B व C यांच्या दरम्यान असल्यामुळे, $l(BD)=l(BC)-l(DC)$···(2)

(1) मध्ये, (2) चा उपयोग करून

$[l(AB)]^2=[l(AD)]^2+[l(BC)-l(DC)]^2$

$=[l(AD)]^2+[l(BC)]^2-2[l(BC)][l(DC)]+[l(DC)]^2$···(3)

पण, $\triangle$ ADC हा काटकोन त्रिकोण असल्यामुळे,

$[l(AD)]^2+[l(DC)]^2=[l(AC)]^2$··· ··· ··· ··· ···(4)

(4) चा, (3) मध्ये उपयोग करून, आपल्याला सिद्ध करायचे विधान लगेच मिळते.

जर $\angle$ B विशाल कोन असेल, तर वरील सिद्धतेत,

(2) ऐवजी, $l(BD)=l(DC)-l(BC)$,

हे समीकरण घेऊन सिद्धता पूर्ण करा.

जर $\angle$ B काटकोन असेल तर हा गुणधर्म म्हणजे पायथॅगोरसचे प्रमेय होते.

16. अपोलोनियसचे प्रमेय :

$\triangle$ ABC मध्ये जर M हा बाजू BC चा मध्यबिंदू असेल तर

$[l(AB)]^2+[l(BC)]^2=2[l(AM)]^2+2[l(BM)]^2$ हे सिद्ध करा.

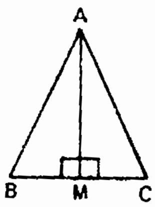
सिद्धता : येथे आपल्याला दोन पर्यायांचा विचार करावा लागेल.

(i) रेख AM, रेख BC ला लंब आहे.

व (ii) रेख AM, रेख BC ला लंब नाही.

ह्यांतील पहिल्या पर्यायाची सिद्धता सोपी आहे. ती तुम्ही लिहा.

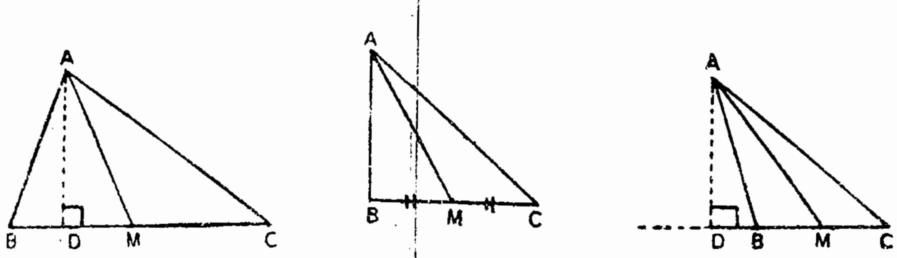
आपण आता दुसऱ्या पर्यायाचा विचार करू.



आ. 12·17

जर रेख AM रेख BC ला लंब नसेल, तर $\angle AMC$ व $\angle AMB$ यांपैकी एक कोन विशाल कोन असतो व दुसरा लघुकोन असतो.

समजा $\angle AMC$ हा विशाल कोन आहे.



(a) (b) (c)

आ. 12·18

A बिंदूतून, रेषा BC ला लंब काढलेली रेषा, रेषा BC ला D बिंदूत छेदते असे समजा.

$\triangle AMC$ मध्ये, $\angle AMC$ हा विशाल कोन असल्यामुळे, वरील उदा. 14 वरून.

$$[l(AC)]^2 = l[AM)]^2 + [l(CM)]^2 + 2[l(CM)][l(DM)] \ldots(1)$$

तसेच, $\triangle AMB$ मध्ये, $\angle AMB$ हा लघुकोन असल्यामुळे, उदा. 15 वरून

$$[l(AB)]^2 = [l(AM)]^2 + [l(BM)]^2 - 2[l(BM)][l(DM)] \ldots(2)$$

पण M हा बाजू BC चा मध्यबिंदू आहे.

$\therefore\ l(BM) = l(CM).$

$\therefore$ (1) व (2) यांची बेरीज करून,

$$[l(AB)]^2 + [l(AC)]^2 = 2[l(AM)]^2 + 2[l(BM)]^2$$

हेच आपल्याला सिद्ध करायचे होते.

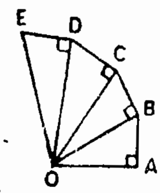
17. $\triangle ABC$ मध्ये M हा बाजू BC चा मध्यबिंदू आहे व $a=8$, $b=6$ व $c=3$ आहे. तर $l(AM)$ काढा.

18. समांतरभुज चौकोनात सर्व बाजूंच्या वर्गांची बेरीज, त्या चौकोनाच्या कर्णांच्या वर्गांच्या बेरजेएवढी असते हे सिद्ध करा.

19. एका समभुज चौकोनाच्या बाजूंची लांबी 5 आहे व एका कर्णाची लांबी 6 आहे. तर त्याच्या दुसऱ्या कर्णाची लांबी, त्या चौकोनाचे क्षेत्रफळ व त्यांच्या समांतर बाजूंमधील लंबांतर काढा.

20. पायथॅगोरसच्या प्रमेयावरून आपण $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, ...या लांबींचे रेषाखंड काढू शकतो. बाजूची आकृती पाहा.

$l(OA) = l(AB) = 1$ व $\angle A$ हा काटकोन घेतल्यास, वरील प्रमेयानुसार, $l(OB) = \sqrt{2}$ होईल.



आ. 12·19

आता $\angle$ OBC काटकोन व l (BC) = 1 घेतल्यास, $\triangle$ OBC या काटकोन त्रिकोणात

$$\left[l\,(OC)\right]^2 = \left[l\,(OB)\right]^2 + \left[l\,(BC)\right]^2 = 2+1=3$$

$\therefore\ l\,(OC) = \sqrt{3}$

याप्रमाणे रचना करत गेल्यास $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$ ... या लांबींचे रेषाखंड मिळतील.

21. जर a, b, c या एका काटकोन त्रिकोणाच्या बाजू असतील (कर्ण c), तर ka, kb, kc या सुद्धा काटकोन त्रिकोणाच्या बाजू असतात, हे सिद्ध करा.

पारिभाषिक शब्द.

काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण – Hypotenuse

चक्रीय चौकोन – Cyclic Quadrilateral

उत्तरे

प्रकरण 1

प्रश्नसंग्रह

[1] एकच, तीन व सहा (जर कोणतेही तीन बिंदू एकरेषीय नसतील तर) किंवा चार (जर त्यांपैकी तीन बिंदू एकरेषीय असतील तर). [2] (a) होय (b) ते एकरेषीय असल्यास (c) नाही. [3] (a) नेमका एक बिंदू (b) एक रेषा (c) नेमका एक बिंदू (d) समाविष्ट करणारी रेषा असेल (e) समाविष्ट करणारे प्रतल नसेल. [4] (a) जास्तीतजास्त एक (b) एक आणि एकच (c) एक तरी (d) एक आणि एकच. [7] $(x-2)$ व $(x+3)$. [9] (i) सत्य (ii) असत्य (iii) असत्य.

प्रकरण 2

§ 2·4 [3] **P** व **R**...तर **Q**...**P** व **R.** [4] नाही. एकतर $l\,(RT)=14$ होईल व R−S−T किंवा $l\,(RT)=4$ होईल व S−T−R पण $l\,(ST) > l\,(SR)$ राहणे शक्यच नाही.

§ 2·6 [1] (i) सत्य (ii) सत्य (iii) असत्य.

§ 2·11 [7] (i) $x=2$ किंवा $x=5$ किंवा $2<x<5$ (ii) $x>2$ किंवा $x=2$ (iii) $x<5$ किंवा $x=5$.

§ 2·13 [5] (i) खोटे (ii) खरे (iii) खोटे.

§ 2·23 [1] (i) 10 (ii) 12 (iii) 6 (iv) 3 (v) 2 (vi) −7. [2] (i) 12 (ii) 11 (iii) $\frac{2}{3}$ (iv) 2. [3] (i) −15, 9 (ii) −3 (iii) −11, 5 (iv) 17 (v) अस्तित्वात नाही. [4] नाही; 17, 7. [5] 18. [6] (i) रेख AB (ii) रेख AC (iii) दोहोंपैकी कुणातच नाही. [7] (i) खरे (ii) खोटे (iii) खरे (iv) खरे (v) खरे (vi) खरे. [8] (i) होय (ii) नाही (iii) होय (iv) नाही. [9] 6. [10] (i) नाही (ii) नाही (iii) होय.

प्रश्नसंग्रह

[1] ......दोन......जोडणाऱ्या......एखादा......नसतो. [2] (i) खरे (ii) खरे (iii) खोटे (iv) खोटे (v) खरे (vi) खरे (vii) खरे. [4] नाही. [8] अर्धप्रतलांत लहानमोठेपणा नसतो. [10] होय.

प्रकरण 3

§ 3·17 [1] ∠AOC व ∠BOC, ∠AOD व ∠BOD, ∠BOD व ∠COD, ∠AOC व ∠AOD. [2] ∠DOC व ∠AOC; ∠DOB व ∠AOB; नाही. [3] नाही.

§ 3·23 [2] (a) 90, 65, 155. (b) ∠QAB; ∠CAQ. (c) ∠CAP व ∠PAQ; ∠PAQ व ∠QAB; ∠CAP व ∠PAB. (d) ∠CAP व ∠PAB; ∠CAQ व ∠QAB.

प्रश्नसंग्रह

[1] (b) खरे (c) खोटे (d) खरे (e) खोटे (f) खरे (g) खोटे (h) खोटे (i) खोटे (j) खरे (k) खरे. [2] (a) लघुकोन (b) काटकोन (c) विशालकोन (d) काटकोन. [3] विशालकोन. [4] ∠A हा विशालकोन; ∠B हा लघुकोन. [6] एकरूप असलेले विशाल कोन, ∠AOE व ∠FOC, प्रत्येकाचे माप 120. [7] नाही. [9] B व C हे बिंदू, L रेषेच्या एकाच बाजूस आहेत.

प्रकरण 4

§ 4·4 [1] ABCD ⟷ RSPQ. [2] ABC ⟷ LNM. [3] P ⟷ L, R ⟷ N, Q ⟷ M. [5] (a) ...संगत...एकरूप (b) △DEF ≅ △LPQ (c) △ABC ≅ △RST.

§ 4·10 [1] (c) ...स्वतःशी. [2] (a) ABC ⟷ DEF (b) बाजू DE (c) बाजू AC (d) बाजू EF (e) ∠F (f) ∠A (g) ∠E. [6] (a) बरोबर (b) चूक (c) चूक (d) बरोबर (e) चूक (f) बरोबर. [7] दोन; ABC ⟷ ABC व ABC ⟷ CAB. [8] △ABC ≅ △ADC, बाबाबा; △EFH ≅ △GHF, बाकोबा; △PQR ≅ △RSP, कोबाको. [9] (a) एकरूप; बाबाबा (b) सांगता येत नाही (c) एकरूप; बाकोबा (d) एकरूप; बाकोको (e) एकरूप; बाकोबा (f) सांगता येत नाही.

§ 4·15 [1] (a)...प्रत्येक असंलग्न... (b) ...लघुकोन... (c) ...180...
[2] (a) ∠EAC, ∠ACD, ∠BCF (b) ∠CBA व ∠CAB (c) ∠EAC चे.
[3] (a) ∠MBA, ∠NBC (b) विरुद्ध कोन म्हणून एकरूप (c) ∠ABM > ∠C (d) ∠CBN > ∠C.

§ 4·27 [1] (a) $l(CA) = l(FD)$ (b) $l(RP) > l(KM)$ (c) $l(ES) < l(XY)$.
[2] अनुक्रमे ∠EDF व ∠DEF. [3] (a) खोटे (b) खरे (c) खोटे (d) खोटे.
[4] सर्वात मोठी रेख SN व सर्वात लहान रेख LN. [5] (a) खोटे (b) खोटे (c) खोटे. (d) खरे. [6] सर्वात मोठा रेषाखंड 70 समोरील आणि सर्वात लहान रेषाखंड 47 समोरील.

प्रश्नसंग्रह

[3] (a) ...... कर्ण ...... एक भुजा ...... कर्ण ...... भुजा (b) एकरूप (c) भुजा (d) कोन; मोठा (e) कर्ण.

प्रकरण 6

§ 6·3 [1] (i) 90 (ii) लंब (iii) रेषा AB ⊥ रेषा CD (iv) काटकोन (vi) रेख AB ⊥ रेषा CD (vii) नाही; आहे.
[2] (i) सत्य (ii) असत्य (iii) असत्य (iv) सत्य (v) सत्य (vi) असत्य (vii) सत्य.

§ 6·13 [1] (i) सत्य (ii) सत्य (iii) असत्य (iv) असत्य (v) असत्य (vi) असत्य (vii) सत्य (viii) असत्य (ix) असत्य (x) सत्य.
[2] (i)......लंबदुभाजकावर (ii) $y=4, z=5$ (iii) AB; CD (iv) (a) जात नाही (b) नसतो (v) (a) जाईल (b) नाही.

6·25 [2] (i) H = I (ii) रेषा AB = रेषा AC (iii) $d(A, H) = d(A, I)$.
[3] (i) अंतर (ii) शिरोलंब (iii) तीन (iv) पाद.

प्रश्नसंग्रह

[1] (i) सत्य (ii) सत्य (iii) सत्य (iv) असत्य (v) सत्य (vi) असत्य (vii) सत्य (viii) असत्य (ix) सत्य. [2] (i) समभुज (ii) D, R आणि B (iii) समान (iv) नसतो...असतो (v) रेख CB व रेख CA; रेख BA व रेख BC (vi) ...समद्वि...

प्रकरण 7

§ 7·7 [2] $d(P, N) = 9$; $d(C, Q) = 5$.

§ 7·20 [1] अनंत. [2] एक व एकच. [3] (i) होय (ii) सांगता येत नाही (iii) होय.
[4] अनंत.

प्रश्नसंग्रह

[1] (i) असत्य (ii) सत्य (iii) सत्य. [3] होय. [4] होय. [6] (i) नाही (ii) होय (iii) नाही (iv) होय. [9] होय.

प्रकरण 8

§ 8·2 [1] (i) असत्य (ii) सत्य (iii) असत्य (iv) असत्य.
[2] (a) (i); (b) (ii); (c) (iii); (d) (iii); (e) (iii).

§ 8·13 [1] (i) असत्य (ii) असत्य (iii) असत्य (iv) सत्य (v) असत्य (vi) असत्य (vii) असत्य (viii) सत्य (ix) असत्य (x) सत्य (xi) सत्य (xii) सत्य (xiii) असत्य (xiv) सत्य.

§ 8·23 [1] (a) सत्य (b) सत्य (c) असत्य (d) सत्य (e) सत्य. [2] असत्य.
[3] संगत, आंतर व्युत्क्रम, छेदिकेच्या एकाच अंगाकडील आंतर कोन, विरुद्ध कोन; 72, 72, 108, 108. [4] (a) ∠BAF (b) ∠ABC (c) ∠ABC (d) (i) ∠CBH किंवा ∠ABD; (ii) ∠ABD; (iii) ∠EAB व ∠ABC किंवा ∠FAB व ∠ABD (e) पूरक.
[5] (i) आहेत (ii) आहेत (iii) नाहीत.

§ 8·32 [1] (i) रेषा...; समांतर (ii) पूरक (iii) समांतर...लंब (iv) एक व एकच (v) लंब
[2] (i) सत्य (ii) सत्य (iii) असत्य (iv) सत्य (v) सत्य (vi) सत्य (vii) सत्य (viii) सत्य (ix) सत्य (x) सत्य (xi) सत्य. [6] (i) 127 (ii) 53.

प्रश्नसंग्रह

[7] (a) होय (b) नाही (c) होय (d) होय.

प्रकरण 9

§ 9·9 [1] (i) {90, 160, 110} (ii) {90, 150, 120} (iii) {70, 160, 130} (iv) {150, 40, 168}. [3] (i) 25 (ii) 20 (iii) 90. [4] 125.

§ 9·15 $\frac{1}{2}\, l(AC)$.

§ 9·44 [1] (i) पुरेशी नाही (ii) पुरेशी आहे (iii) पुरेशी आहे (iv) पुरेशी आहे.
[6] (i) एकरूप, लंबदुभाजक.

§ 9·47 [3] प्रत्येकी 69.

§ 9·49 [2] त्रिकोण. [3] रेख AC.

§ 9·51 [2] सहा; तीन.

प्रश्नसंग्रह

[1] (i) ...असमांतर...कर्णांच्या (ii) जातात. [6] (i) 10 (ii) 7 (iii) 22.

प्रकरण 10

प्रश्नसंग्रह

[1] (a) समाईक...नैकप्रतल...संयोगाला. (b) प्रतलकोनाचे (c) एकरूप (d) काटकोन (e) द्विवितल काटकोन. [4] सहा. [7] अनुक्रमे 45, 90, 45.
[8] (a) असत्य (b) असत्य. (c) असत्य (d) असत्य (e) सत्य (f) सत्य (g) असत्य (h) असत्य.

प्रकरण 11

प्रश्नसंग्रह

[1] a, c, e व f. [2] a, b, c, e व g. [3] (a) 6 (b) 2. [4] (a) 24 (b) 408 (c) 1. (d) $3x-6$ (e) x^2-4. [5] (i) 16 (ii) 15 (iii) 12 (iv) 4; 4. [6] 480.
[7] अनुक्रमे $6\sqrt{10}$ व $4\sqrt{10}$. [8] 72. [9] 27. [10] (a) 6 (b) 8 (c) 16 (d) 10.
[11] (a) 112 (b) 19·2 (c) 9 (d) 75 (e) 17. [12] 40. [14] 48. [15] 147.

प्रकरण 12

§ 12·6 [1] (i) 5 (ii) $\sqrt{39}$ (iii) 12. [2] $\sqrt{20}$ किमी. [3] $\sqrt{189}$ किमी. [4] $\sqrt{3}$.
[5] (i) नाही (ii) राहील; $\angle A$ (iii) राहील; $\angle C$ (iv) नाही.

प्रश्नसंग्रह

[1] $a\sqrt{2}$. [2] 10. [3] (i) 50 (ii) $25\sqrt{3}$ (iii) $2\sqrt{3}$. [4] $\frac{5}{3}(13+5\sqrt{3})$.
[5] (i) प्रत्येकी 60 (ii) $m\angle A=90$, $m\angle B=30$ व $m\angle C=60$
(iii) $m\angle A=m\angle B=45$ व $m\angle C=90$. [6] अनुक्रमे 24 व 4·8. [7] $\sqrt{99}$.
[8] $2\sqrt{53}$ किमी. [9] $a\sqrt{3}$. [10] $5\sqrt{5}$. [17] $\sqrt{6.5}$. [19] अनुक्रमे 8, 24, 4·8.